
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01218166 5

COURS

DE

CALCUL INFINITÉSIMAL.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,

Quai des Augustins, 55.



COURS

DE

CALCUL INFINITÉSIMAL,

PAR J. HOÜEL,

Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

TOME TROISIÈME.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

—

1880

(Tous droits réservés.)

QA
303
H62
v.2

24037
4/5/92

COURS

DE

CALCUL INFINITÉSIMAL.

LIVRE QUATRIÈME.

THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

(Suite.)

CHAPITRE V.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES.

§ I.

DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES EN GÉNÉRAL

932. Étant données n équations finies entre $n+1$ variables et n constantes arbitraires, si, entre ces n équations et les n autres équations qui résultent de leur différentiation immédiate, on élimine les n constantes arbitraires, on obtiendra n relations entre les $n+1$ variables et les n dérivées de n quelconques d'entre elles, prises par rapport à la $(n+1)^{\text{ième}}$, que l'on considère comme la variable indépendante.

Ces n équations différentielles simultanées seront équivalentes aux équations primitives proposées. En effet, les équations proposées peuvent être supposées résolues par rapport aux n con-

stantes, et mises sous la forme

$$U_1 = C_1, \quad U_2 = C_2, \quad \ldots, \quad U_n = C_n.$$

En différentiant ces dernières relations, on obtient les équations

$$dU_1 = 0, \quad dU_2 = 0, \quad \ldots, \quad dU_n = 0,$$

équivalentes, d'une part, aux équations différentielles qui résultent de l'élimination de $C_1, C_2, \ldots, C_n$, et, d'autre part, aux équations proposées, qu'on en déduit immédiatement par l'intégration.

Il faut toutefois faire ici des réserves analogues à celles que nous avons faites pour les équations à deux variables, relativement aux facteurs étrangers et aux solutions singulières proprement dites.

933. Si les n équations proposées renfermaient plus de n constantes, soit $n+k$, il faudrait alors, pour pouvoir faire l'élimination de toutes ces constantes, différentier plus d'une fois une ou plusieurs des équations, de manière que le nombre total des différentiations effectuées fût égal au nombre $n+k$ des constantes. Il en résulterait ainsi $2n+k$ équations, entre lesquelles on éliminerait les $n+k$ constantes, et l'on obtiendrait par là n équations simultanées, dont quelques-unes au moins seraient d'un ordre supérieur au premier par rapport à certaines variables.

On voit que des mêmes équations finies on peut tirer plusieurs systèmes équivalents d'équations différentielles. Chacun des systèmes ainsi obtenus sera dit un système d'ordre $n+k$, parce qu'il équivaut à un système d'équations finies renfermant $n+k$ constantes arbitraires.

934. Réciproquement, étant donné un système d'équations différentielles simultanées, ce système correspondra à un certain système d'*équations intégrales*. On peut le faire voir soit en montrant qu'un système d'équations différentielles simultanées peut se ramener à une seule équation différentielle combinée avec des équations finies, soit en ramenant ce même système à un système d'équations différentielles simultanées du premier ordre.

Soient, par exemple, les deux équations

$$(1)\qquad \begin{cases} f(t, x, \ldots, x^{(m)}, y, \ldots, y^{(n)}) = 0, \\ \varphi(t, x, \ldots, x^{(\mu)}, y, \ldots, y^{(\nu)}) = 0, \end{cases}$$

entre les variables t, x, y et les dérivées des divers ordres de x et de y par rapport à t, pris comme variable indépendante. En différentiant la première de ces équations ν fois, la seconde n fois, on obtiendra en tout $n+\nu+2$ équations, entre lesquelles on pourra éliminer y et ses $n+\nu$ premières dérivées. Il en résultera une équation différentielle entre x et t, dont l'ordre M sera égal au plus grand des deux nombres $m+\nu$, $n+\mu$. De cette équation on tirera, par l'intégration, x exprimé en fonction de t et de M constantes arbitraires, et, en éliminant, entre cette équation intégrale et les $n+\nu+1$ autres équations, x et les $n+\nu$ dérivées de y, il restera une relation entre y, t et les mêmes M constantes arbitraires.

L'ordre de l'équation finale et par suite aussi le nombre des constantes arbitraires qui entrent dans les équations intégrales peuvent s'abaisser lorsque, pour l'élimination de y et de ses dérivées, on n'a pas besoin de différentier les équations un aussi grand nombre de fois et d'employer toutes les $n+\nu+2$ équations précédentes.

Généralement, étant données k équations différentielles simultanées entre $k+1$ variables, on éliminera d'abord une des variables dépendantes entre les k équations, prises deux à deux, ce qui ramènera à un système de $k-1$ équations entre k variables. On ramènera de même ce système à un système de $k-2$ équations entre $k-1$ variables, et ainsi de suite.

935. On peut, au contraire, en introduisant de nouvelles variables, ramener tout système d'équations différentielles simultanées d'ordre quelconque à un système d'équations différentielles simultanées du premier ordre.

Soit, par exemple, l'équation unique du troisième ordre

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}\right)=0;$$

on pourra la remplacer par les trois équations du premier ordre

$$\frac{dy}{dx}=y', \quad \frac{dy'}{dx}=y'', \quad f\left(x, y, y', y'', \frac{dy''}{dx}\right)=0.$$

De même, si dans les équations (1) du numéro précédent on

suppose

$$m \geqq \mu, \quad \nu \geqq n,$$

c'est-à-dire si chacune des équations proposées contient la plus haute dérivée de quelqu'une des variables, savoir, ici, la première équation la plus haute dérivée de x, la seconde équation la plus haute dérivée de y, alors on pourra remplacer ces équations par les $m + \nu$ équations du premier ordre

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dx'}{dt} = x'', \quad \ldots, \quad \frac{dx^{(m-2)}}{dt} = x^{(m-1)},$$

$$f\left(t, x, \ldots, x^{(m-1)}, \frac{dx^{(m-1)}}{dt}, y, \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dy'}{dt} = y'', \quad \ldots, \quad \frac{dy^{(\nu-2)}}{dt} = y^{(\nu-1)},$$

$$\varphi\left(t, x, \ldots, x^{(\mu)}, y, \ldots, y^{(\nu-1)}, \frac{dy^{(\nu-1)}}{dt}\right) = 0.$$

Ainsi, le cas des équations simultanées du premier ordre embrasse le cas le plus général des équations différentielles à une seule variable indépendante.

Le nombre des équations du premier ordre, telles qu'on puisse les résoudre par rapport à un pareil nombre de dérivées des diverses variables dépendantes, est égal au nombre des constantes arbitraires du système des intégrales, ou à l'ordre de l'équation différentielle unique à laquelle le système est réductible. Ce nombre s'appelle l'*ordre du système*.

936. Pour que les équations différentielles du premier ordre soient résolubles par rapport à toutes les dérivées, il faut et il suffit que chacune des équations d'ordre quelconque du système proposé renferme la plus haute dérivée de quelqu'une des variables dépendantes, et que, si elle renferme plusieurs de ces plus hautes dérivées, celles-ci ne se trouvent pas engagées sous une même fonction dans toutes celles des équations qui les renferment.

Si cette condition n'est pas remplie, l'introduction de nouvelles variables changera quelques-unes des équations et même quelques-unes de leurs différentielles en équations finies, et à l'aide de celles-ci on pourra éliminer algébriquement quelques-unes des variables auxiliaires, ce qui diminuera le nombre des équations

différentielles du premier ordre et abaissera ainsi l'ordre du système.

Supposons, par exemple, que, dans les équations (1), on ait

$$m = 7, \quad n = 5, \quad \mu = 2, \quad \nu = 3.$$

En différentiant deux fois la seconde équation

$$\varphi\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^3y}{dt^3}\right) = 0,$$

on en tirera deux équations qui contiendront $\frac{d^4y}{dt^4}$, $\frac{d^5y}{dt^5}$, et qui feront connaître ces deux dérivées, exprimées au moyen de

$$t, x, \ldots, \frac{d^4x}{dt^4}, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^3y}{dt^3}.$$

En substituant ces expressions dans l'équation $f = 0$, celle-ci prendra la forme

$$f_1\left(t, x, \ldots, \frac{d^7x}{dt^7}, y, \ldots, \frac{d^3y}{dt^3}\right) = 0.$$

Si l'on pose maintenant

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dx'}{dt} = x'', \quad \frac{dx''}{dt} = x''', \quad \frac{dx'''}{dt} = x^{\text{IV}}, \quad \frac{dx^{\text{IV}}}{dt} = x^{\text{V}}, \quad \frac{dx^{\text{V}}}{dt} = x^{\text{VI}},$$

$$\frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dy'}{dt} = y'',$$

le système se réduira à ces huit équations, jointes aux deux suivantes :

$$f_1\left(t, x, x', \ldots, x^{\text{VI}}, \frac{dx^{\text{VI}}}{dt}, y, y', y'', \frac{dy''}{dt}\right) = 0,$$

$$\varphi\left(t, x, x', x'', y, y', y'', \frac{dy''}{dt}\right) = 0,$$

et l'on aura ainsi dix équations du premier ordre, d'où l'on pourra tirer les expressions des dérivées par rapport à t des dix variables dépendantes $x, x', \ldots, x^{\text{VI}}, y, y', y''$. L'ordre du système est donc égal à 10, c'est-à-dire au plus grand des deux nombres $m + \nu$, $n + \mu$, comme on l'aurait trouvé par la méthode du n° 934.

937. Puisque le cas des équations différentielles simultanées du premier ordre comprend le cas le plus général d'un système d'équa-

tions différentielles à une seule variable indépendante, occupons-nous plus particulièrement de ces équations.

Supposons, par exemple, que l'on donne deux équations entre les quantités

$$x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx},$$

et que ces équations soient telles que l'on puisse en tirer les valeurs de chacune des deux dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, en fonction de x, y, z. Si l'on représente ces deux valeurs par $\frac{Y}{X}$, $\frac{Z}{X}$, chacune des quantités X, Y, Z étant généralement une fonction de x, y, z, on pourra mettre alors les équations proposées sous la forme

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

En appliquant à ces équations les mêmes considérations qu'au n° 790, on verra facilement qu'elles peuvent servir à construire, sur les plans des xy et des xz, deux polygones infinitésimaux, qui auront pour limites deux courbes planes, passant chacune par un point arbitraire de son plan. Soient y_0, z_0 les valeurs arbitraires de y, z, correspondantes à la valeur donnée x_0 de x. Par chacun des points (x_0, y_0), (x_0, z_0), on mènera des droites ayant pour coefficients angulaires respectifs les quantités

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \frac{Y_0}{X_0}, \quad \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 = \frac{Z_0}{X_0}.$$

Soient y_1, z_1 les ordonnées des points de ces droites qui correspondent à l'abscisse $x_1 = x_0 + dx_0$. En substituant les valeurs x_1, y_1, z_1 dans X, Y, Z, on aura de nouveaux coefficients angulaires

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \frac{Y_1}{X_1}, \quad \left(\frac{dz}{dx}\right)_1 = \frac{Z_1}{X_1},$$

qui détermineront de nouvelles droites passant par les points (x_1, y_1), (x_1, z_1). En continuant ainsi, on obtiendra deux polygones infinitésimaux, qui auront pour limites deux courbes dont les ordonnées y et z satisferont aux équations différentielles données, et dont les équations renfermeront deux constantes arbi-

traires y_0, z_0, que l'on pourra remplacer par deux autres constantes arbitraires, liées avec celles-là d'une manière quelconque.

On peut considérer les points (x, y), (x, z) des deux plans des xy et des xz comme les projections d'un même point (x, y, z) de l'espace, et alors les deux courbes en question seront les projections d'une même courbe à double courbure, qui sera complètement déterminée par les équations différentielles dès que l'on connaîtra un point de l'espace par lequel elle doive passer, ou deux autres conditions quelconques équivalentes à celle-là. On verrait, comme dans le cas d'une seule équation entre deux variables, que toute courbe dont les équations contiennent deux constantes arbitraires *distinctes*, et qui satisfait à l'ensemble des deux équations différentielles, quelles que soient les valeurs de ces constantes, ne peut que coïncider avec celle que nous avons déterminée, dès que l'on choisit les constantes de telle manière que, pour $x = x_0$, on ait $y = y_0$, $z = z_0$.

On reconnaît ainsi qu'un système de deux équations renfermant deux constantes arbitraires, et satisfaisant aux équations différentielles, quelles que soient les valeurs de ces constantes, représente le système des *intégrales générales* de ces équations différentielles, lorsque, pour une valeur quelconque $x = x_0$, on peut, en disposant des constantes, faire prendre à y et à z des valeurs arbitraires quelconques, ou, ce qui revient au même, lorsqu'on peut faire passer par un point arbitraire de l'espace la courbe représentée par ces équations.

938. De même, étant donné un nombre quelconque n d'équations différentielles du premier ordre entre les $n+1$ variables $t, x, y, z, \ldots$, si l'on peut résoudre ces équations par rapport à chacun des rapports différentiels

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}, \quad \ldots,$$

on pourra, au moyen des n équations, mises sous la forme

$$(1) \qquad \frac{dt}{T} = \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \cdots,$$

construire des courbes représentant chacune des fonctions incon-

nues $x, y, \ldots$ de la variable t, et passant par des points arbitraires du plan. Les équations de ces n courbes dépendent des n valeurs arbitraires que prennent les n inconnues $x, y, \ldots$ pour une valeur donnée $t = t_0$ de la variable indépendante, c'est-à-dire qu'elles renferment un nombre n de constantes arbitraires égal au nombre des fonctions inconnues ou à celui des équations.

939. Ce que nous venons de dire suppose essentiellement que les n équations données soient résolubles par rapport aux n dérivées des n variables prises relativement à la $(n+1)^{\text{ième}}$, c'est-à-dire qu'on puisse mettre ces équations sous la forme (1). Alors l'ordre du système est égal au nombre n des équations. S'il n'en était pas ainsi, l'ordre du système serait moindre que n.

Supposons, par exemple, dans le cas de deux équations entre trois variables, que les dérivées $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ n'entrent dans ces équations que renfermées dans une même fonction

$$\varphi\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right).$$

En éliminant cette fonction φ entre les deux équations, il restera une équation finie entre t, x, y, dont la différentiation fera connaître $\frac{dy}{dt}$ en fonction de $t, x, y, \frac{dx}{dt}$. Si l'on substitue cette valeur dans l'une des équations proposées, le système donné se trouvera remplacé par deux équations de la forme

$$f(t, x, y) = 0, \quad F\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}\right) = 0.$$

Si l'on élimine maintenant y entre ces dernières, on aura une équation différentielle entre $t, x, \frac{dx}{dt}$, d'où l'on tirera x en fonction de t et d'une constante arbitraire C. Par suite, l'équation finie $f = 0$ donnera y en fonction de t et de la même constante. Le système donné ne sera donc que du premier ordre.

Exemple. — En éliminant $\frac{dy}{dt}$ entre les équations

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + t = 0, \quad t\frac{dx}{dt} + t\frac{dy}{dt} + x - t^2 = 0,$$

$\frac{dx}{dt}$ disparaît en même temps, et il vient

$$2t^2 - x = 0.$$

Si l'on substitue pour dx sa valeur $4t\,dt$ dans la première équation, celle-ci devient

$$\frac{dy}{dt} + 5t = 0, \quad \text{d'où} \quad y = C - \frac{5}{2}t^2.$$

Les équations intégrales ne contiennent donc qu'une seule constante arbitraire, parce que $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ n'entraient dans les équations différentielles que par la fonction $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$.

940. On peut, au moyen des équations différentielles, mises sous la forme

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = \varphi(t, x, y, \ldots), \qquad \frac{dy}{dt} = \chi(t, x, y, \ldots), \quad \ldots,$$

obtenir le développement des fonctions inconnues $x, y, \ldots$ en séries ordonnées suivant les puissances de l'accroissement $t - t_0$ de la variable indépendante. En effet, par des différentiations et des éliminations successives, on tirera, comme aux nos 792 et 800, des équations (2) les valeurs de toutes les dérivées d'ordres supérieurs

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \ \frac{d^3x}{dt^3}, \ \ldots, \ \frac{d^2y}{dt^2}, \ \frac{d^3y}{dt^3}, \ \ldots,$$

exprimées au moyen des variables $t, x, y, \ldots$.

Cela posé, soient $x_0, y_0, \ldots$ les valeurs arbitraires de $x, y, \ldots$ pour $t = t_0$. Des équations (2) et de celles que nous venons d'en déduire on tirera les valeurs des dérivées

$$\frac{dx}{dt}, \ \frac{d^2x}{dt^2}, \ \ldots, \ \frac{dy}{dt}, \ \frac{d^2y}{dt^2}, \ \ldots$$

en fonction de t_0 et des constantes arbitraires $x_0, y_0, \ldots$, et l'on

aura ainsi les valeurs des coefficients des développements

$$x = x_0 + \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 \frac{t - t_0}{1} + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 \frac{(t - t_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 \frac{t - t_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_0 \frac{(t - t_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

etc., ...

$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0$, ... étant les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, ... pour $t = t_0$.

Remarque. — Il semble, au premier abord, que ces valeurs des n inconnues $x, y, \ldots$ renferment $n+1$ constantes arbitraires, en y comprenant t_0. Mais on observera, comme nous l'avons déjà fait dans un cas analogue [808], que, les deux systèmes de valeurs $t, x, y, \ldots$ et $t_0, x_0, y_0, \ldots$ devant entrer symétriquement dans les équations intégrales, il en résulte que ces équations sont d'une forme particulière, en vertu de laquelle les $n+1$ constantes équivalent seulement à n arbitraires distinctes.

§ II.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES LINÉAIRES.

941. On appelle *équations différentielles linéaires* celles dans lesquelles les fonctions inconnues $x, y, \ldots$ et leurs dérivées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}, \ldots, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots$ par rapport à la variable indépendante t n'entrent qu'au premier degré et sans être multipliées entre elles. Nous allons étudier les propriétés générales des équations différentielles linéaires, lesquelles sont une extension des propriétés établies dans les Chapitres précédents, pour le cas d'une seule équation différentielle linéaire.

Si nous désignons par $\varphi_1, \chi_1, \ldots, \varphi_2, \chi_2, \ldots$ des fonctions rationnelles et entières, dont les coefficients soient ou des constantes ou des fonctions quelconques de la seule variable indépendante t, et si $x, y, \ldots$ sont des fonctions inconnues de t en même nombre que les équations données, le type général d'un système d'équations

différentielles linéaires sera

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi_1(D_t)x + \chi_1(D_t)y + \ldots = T_1, \\ \varphi_2(D_t)x + \chi_2(D_t)y + \ldots = T_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$T_1, T_2, \ldots$ étant des fonctions données de t.

D'après ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent, on peut toujours supposer que les équations proposées aient été transformées de telle manière qu'elles soient résolubles par rapport aux plus hautes dérivées de toutes les fonctions inconnues qui y entrent. Dans ce cas, chacune des équations contiendra la plus haute dérivée de l'une des fonctions inconnues.

Ainsi, si l'on désigne par

$$l_1,\ m_1,\ \ldots,\ l_2,\ m_2,\ \ldots$$

les degrés respectifs des fonctions

$$\varphi_1,\ \chi_1,\ \ldots,\ \varphi_2,\ \chi_2,\ \ldots,$$

on pourra supposer que l'on ait

$$(2)\qquad l_1 \geqq l_2,\ l_3,\ \ldots;\quad m_2 \geqq m_1,\ m_3,\ \ldots;\ \text{etc.}$$

Alors l'ordre du système (1) sera

$$N = l_1 + m_2 + \ldots.$$

Par des éliminations, on pourra toujours faire en sorte que le cas d'égalité soit exclu des conditions (2), qui deviendront ainsi

$$(3)\qquad l_1 > l_2,\ l_3,\ \ldots;\quad m_2 > m_1,\ m_3,\ \ldots;\ \text{etc.}$$

942. On peut, si l'on veut, se contenter de considérer le cas des équations linéaires *du premier ordre*, auquel on peut ramener le cas général par l'introduction d'inconnues auxiliaires représentant les dérivées des inconnues d'ordres inférieurs aux plus élevés.

Si l'on a préparé les équations proposées (1) de manière que chacune des plus hautes dérivées n'entre que dans une seule équation, les conditions (3) ayant lieu, alors, quand les équations seront ramenées au premier ordre, chacune d'elles contiendra une dérivée, et une seule, de sorte qu'on pourra toujours réduire un système

donné à la forme

$$(4)\qquad \begin{cases} (a_1 + a'_1\,\mathrm{D}_t)\,x + b_1 y + \ldots = \mathrm{T}_1, \\ a_2 x + (b_2 + b'_2\,\mathrm{D}_t)\,y + \ldots = \mathrm{T}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Dans le cas où les seconds membres T_1, T_2, ... seront nuls, on aura un système d'*équations sans seconds membres* ou d'*équations homogènes*

$$(5)\qquad \begin{cases} \varphi_1(\mathrm{D}_t)\,x + \chi_1(\mathrm{D}_t)\,y + \ldots = 0, \\ \varphi_2(\mathrm{D}_t)\,x + \chi_2(\mathrm{D}_t)\,y + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

ou, si les équations sont ramenées au premier ordre,

$$(6)\qquad \begin{cases} (a_1 + a'_1\,\mathrm{D}_t)\,x + b_1 y + \ldots = 0, \\ a_2 x + (b_2 + b'_2\,\mathrm{D}_t)\,y + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Nous verrons qu'il est toujours possible de ramener l'intégration d'un système d'équations *complètes* (1) ou (4) à celle d'un système d'équations sans seconds membres (5) ou (6).

943. Les équations linéaires simultanées sans seconds membres jouissent de propriétés analogues à celles que nous avons établies dans le Chapitre IV pour le cas d'une seule équation linéaire d'ordre quelconque sans second membre, laquelle est comprise [935] dans le cas plus général des équations (5) ou (6).

I. Si $x_1, y_1, \ldots$ représente un système d'intégrales particulières des équations (5) ou (6), c'est-à-dire un système de fonctions de t qui, substituées à $x, y, \ldots$ respectivement dans les équations (2), rendent celles-ci identiques, on obtiendra un autre système d'intégrales $\mathrm{C}x_1, \mathrm{C}y_1, \ldots$ des mêmes équations (5) ou (6) en multipliant les intégrales données par une même constante arbitraire C.

II. Si l'on a plusieurs systèmes $(x_1, y_1, \ldots)$, $(x_2, y_2, \ldots)$, ... d'intégrales particulières des équations (5) ou (6), le système de valeurs

$$x_1 + x_2 + \ldots,\quad y_1 + y_2 + \ldots,\quad \ldots,$$

formé par addition au moyen des systèmes donnés, sera encore un système d'intégrales des mêmes équations.

III. De la combinaison de ces deux théorèmes il s'ensuit que, si l'on désigne par $(x_1, y_1, \ldots)$, $(x_2, y_2, \ldots)$, ... des systèmes quelconques d'intégrales particulières des équations (5) ou (6) et par C_1, C_2, ... des constantes arbitraires, le système de valeurs

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots, \quad C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots, \quad \text{etc.}$$

sera encore un système d'intégrales des équations (5) ou (6).

944. IV. Soient

$$(x_1, y_1, \ldots), \quad (x_2, y_2, \ldots), \quad \ldots$$

n systèmes d'intégrales particulières des n équations (6), et supposons que ces n systèmes soient *distincts,* c'est-à-dire que les équations

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots, \\ y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

puissent être résolues, pour toute valeur de t, par rapport aux inconnues C_1, C_2, ... Il faut et il suffit, pour cela, que le déterminant

$$(8) \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \ldots \\ x_2 & y_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas, quel que soit t. Dans ce cas, les équations (7) représenteront le système des intégrales générales des équations (6); car on pourra alors disposer des constantes C_1, C_2, ... de telle manière que les fonctions x, y, ... prennent, pour la valeur donnée à volonté $t = t_0$, des valeurs arbitraires x_0, y_0, ...

Dans le cas du système des équations (5) d'ordre N, si l'on donne n équations (7), renfermant N systèmes d'intégrales particulières

$$(x_1, y_1, \ldots), \quad \ldots, \quad (x_N, y_N, \ldots),$$

et par suite N constantes arbitraires C_1, ..., C_N, les équations (7) seront les intégrales générales des équations (5), si l'on peut résoudre par rapport aux constantes C_1, ..., C_N le système formé par les équations (7), jointes aux $l_1 - 1$ premières dérivées de la

première de ces équations, aux $m_2 - 1$ premières dérivées de la seconde, etc., c'est-à-dire si le déterminant

$$(9)\quad \begin{vmatrix} x_1 & x'_1 & \dots & x_1^{(l_1-1)} & y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(m_2-1)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_N & x'_N & \dots & x_N^{(l_1-1)} & y_N & y'_N & \dots & y_N^{(m_2-1)} & \dots \end{vmatrix}$$

n'est pas nul.

S'il existait, entre les intégrales des systèmes donnés, n (ou N) relations linéaires à coefficients constants, de la forme

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots = 0,$$
$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

le déterminant (8) ou (9) s'évanouirait [879], et, les équations (7) (ou ces mêmes équations jointes à leurs dérivées des ordres $l_1 - 1$, $m_2 - 1, \dots$) n'étant plus résolubles, les systèmes d'intégrales donnés ne seraient plus distincts. On voit d'ailleurs, comme au n° 879, que, le nombre des constantes arbitraires se réduisant d'une unité, il n'en resterait plus assez pour que les équations (7) représentassent les intégrales générales des équations (5) ou (6).

945. V. Si l'on connaît un système $(x_1, y_1, z_1, \dots)$ d'intégrales particulières des équations (5), on pourra ramener l'intégration de ces équations à celle d'un système d'équations de même nature, mais dont l'ordre sera moindre d'une unité.

Considérons d'abord, pour plus de simplicité, le cas particulier des équations (6), et posons

$$x = \mathfrak{x} x_1, \quad y = (\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) y_1, \quad z = (\mathfrak{x} + \mathfrak{z}) z_1, \quad \dots,$$

$\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \dots$ étant de nouvelles fonctions inconnues. En substituant ces valeurs dans les équations (6), celles-ci deviennent

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{x}[(a_1 + a'_1 D_t) x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 + \dots] \\ &\quad + a'_1 x_1 D_t \mathfrak{x} + b_1 y_1 \mathfrak{y} + c_1 z_1 \mathfrak{z} + \dots, \\ 0 &= \mathfrak{x}[a_2 x_1 + (b_2 + b'_2 D_t) y_1 + c_2 z_1 + \dots] \\ &\quad + b'_2 y_1 D_t(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) + (b_2 + b'_2 D_t) y_1 . \mathfrak{y} + c_2 z_1 \mathfrak{z} + \dots, \\ 0 &= \mathfrak{x}[a_3 x_1 + b_3 y_1 + (c_3 + c'_3 D_t) z_1 + \dots] \\ &\quad + c'_3 z_1 D_t(\mathfrak{x} + \mathfrak{z}) + b_3 y_1 \mathfrak{y} + (c_3 + c'_3 D_t) z_1 . \mathfrak{z} + \dots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Dans chacune de ces équations, les termes multipliés par $\mathfrak{x}$ s'évanouissent, puisque les valeurs $x_1, y_1, \ldots$ forment un système d'intégrales particulières des équations (6). Ces équations se réduisent donc aux suivantes :

$$\begin{aligned}
0 &= a'_1 x_1 D_t \mathfrak{x} + b_1 y_1 \mathfrak{y} + c_1 z_1 \mathfrak{z} + \ldots, \\
0 &= b'_2 y_1 D_t (\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) + (b_2 y_1 + b'_2 D_t y_1) \mathfrak{y} + c_2 z_1 \mathfrak{z} + \ldots, \\
0 &= c'_3 z_1 D_t (\mathfrak{x} + \mathfrak{z}) + b_3 y_1 \mathfrak{y} + (c_3 z_1 + c'_3 D_t z_1) \mathfrak{z} + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En éliminant $D_t \mathfrak{x}$ entre la première de ces équations et chacune des autres, $\mathfrak{x}$ disparaît, et il ne reste plus que $n-1$ équations pour déterminer les $n-1$ inconnues $\mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$. Ces $n-1$ équations

$$(10) \qquad \left\{\begin{aligned}
&(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}'_1 D_t) \mathfrak{y} + \mathfrak{c}_1 \mathfrak{z} + \ldots = 0, \\
&\mathfrak{b}_2 \mathfrak{y} + (\mathfrak{c}_2 + \mathfrak{c}'_2 D_t) \mathfrak{z} + \ldots = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

où $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}'_1, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{b}_2, \ldots$ désignent des fonctions connues de t, sont de même forme que les équations (6).

Lorsqu'on aura déterminé $\mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ au moyen de ces équations, si l'on pose, pour abréger,

$$\mathfrak{X} = -\frac{b_1 y_1 \mathfrak{y} + c_1 z_1 \mathfrak{z} + \ldots}{a'_1 x_1},$$

il viendra

$$(11) \qquad \mathfrak{x} = C_1 + \int \mathfrak{X}\, dt,$$

d'où l'on tirera, pour les inconnues $x, y, z, \ldots$, les valeurs

$$(12) \qquad \left\{\begin{aligned}
x &= C_1 x_1 + x_1 \int \mathfrak{X}\, dt, \\
y &= C_1 y_1 + y_1 \left(\mathfrak{y} + \int \mathfrak{X}\, dt\right), \\
z &= C_1 z_1 + z_1 \left(\mathfrak{z} + \int \mathfrak{X}\, dt\right), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Si l'on connaît un second système $(x_2, y_2, z_2, \ldots)$ d'intégrales particulières des équations (6), on en tirera une valeur particulière de $\mathfrak{x}$,

$$\mathfrak{x}_1 = \frac{x_2}{x_1},$$

d'où résulte un système d'intégrales particulières des équations (10)

$$\mathfrak{y}_1 = \frac{y_2}{y_1} - \frac{x_2}{x_1}, \quad \mathfrak{z}_1 = \frac{z_2}{z_1} - \frac{x_2}{x_1}, \quad \ldots .$$

On pourra alors abaisser l'ordre du système (10) encore d'une unité, en posant

$$\mathfrak{y} = Y\mathfrak{y}_1, \quad \mathfrak{z} = (Y + Z)\mathfrak{z}_1, \quad \ldots,$$

et l'on obtiendra pour $\mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \ldots$ des valeurs de forme analogue aux valeurs (12),

$$(13) \quad \begin{cases} \mathfrak{y} = C_2\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{y}_1 \int Y\,dt, \\ \mathfrak{z} = C_2\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_1 \left(Z + \int Y\,dt\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de $\mathfrak{X}$, cette expression deviendra

$$\mathfrak{X} = C_2\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Y},$$

$\mathfrak{X}_1$ étant la valeur particulière que prend $\mathfrak{X}$, lorsqu'on y remplace $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}, \ldots$ par $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1, \ldots$, et $\mathfrak{Y}$ étant une expression dépendante des quantités $Z \ldots$. La valeur de x deviendra alors

$$x = C_1x_1 + C_2x_1 \int \mathfrak{X}_1\,dt + x_1 \int \mathfrak{Y}\,dt,$$

ou en remarquant que $\mathfrak{x}_1 \int \mathfrak{X}_1\,dt$ est une valeur particulière de $\mathfrak{x}$, et par suite $x_1 \int \mathfrak{X}_1\,dt$ une valeur particulière x_2 de x,

$$x = C_1x_1 + C_2x_2 + x_1 \int \mathfrak{Y}\,dt.$$

On trouverait de même, pour les autres inconnues, des valeurs de la forme

$$\begin{aligned} y &= C_1y_1 + C_2y_2 + y_1 \int \mathfrak{Y}^{(1)}\,dt, \\ z &= C_1z_1 + C_2z_2 + z_1 \int \mathfrak{Y}^{(2)}\,dt, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

$x_2, y_2, z_2, \ldots$ formant un système de valeurs particulières de x, y, $z, \ldots$; et ainsi de suite.

On voit donc que, s'il existe pour chaque système d'équations (6), (10), ... un système d'intégrales particulières $(x_1, y_1, \ldots)$, $(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1, \ldots)$, ..., différentes toutes de zéro, on pourra abaisser, au moyen de ces systèmes, l'ordre du système d'équations (6), jusqu'à ce que l'on arrive à son intégration complète, et le système des équations intégrales sera alors de la forme (7).

Exemple. — Les équations

$$(4 + D_t)x + 3y = 0,$$
$$2x + (5 + D_t)y = 0$$

admettent, comme nous le verrons plus loin [950], le système d'intégrales particulières

$$x_1 = 3e^{-2t}, \quad y_1 = -2e^{-2t}.$$

Posons, en conséquence,

$$x = 3e^{-2t}\mathfrak{x}, \quad y = -2e^{-2t}(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}).$$

En substituant dans les équations proposées et supprimant les termes multipliés par $\mathfrak{x}$, il vient

$$3e^{-2t} D_t\mathfrak{x} - 6e^{-2t}\mathfrak{y} = 0,$$
$$-2e^{-2t} D_t(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) - 6e^{-2t}\mathfrak{y} = 0,$$

d'où, en éliminant $D_t\mathfrak{x}$,

$$6e^{-2t} D_t\mathfrak{y} + 30e^{-2t}\mathfrak{y} = 0, \quad \text{ou} \quad D_t\mathfrak{y} + 5\mathfrak{y} = 0,$$

d'où

$$\mathfrak{y} = C_2 e^{-5t}, \quad \mathfrak{x} = 2\int \mathfrak{y}\,dt = C_1 - \frac{2}{5} C_2 e^{-5t},$$

et enfin

$$x = 3C_1 e^{-2t} - \frac{6}{5} C_2 e^{-7t}, \quad y = -2C_1 e^{-2t} - \frac{6}{5} C_2 e^{-7t}.$$

On voit que cette méthode est analogue à celle de d'Alembert pour l'abaissement d'une seule équation différentielle linéaire entre deux variables, que nous avons exposée au n° 881.

946. On peut étendre les mêmes calculs aux équations de la forme (5). Soit $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ un système d'intégrales particulières de ces équations. Posons encore

$$x = \mathfrak{x}x_1, \quad y = (\mathfrak{x} + \mathfrak{y})y_1, \quad \ldots$$

La première des équations (5) deviendra [881]

$$\varphi_1(D_t)(\mathfrak{x}x_1) + \chi_1(D_t)[(\mathfrak{x} + \mathfrak{y})y_1] + \ldots = 0,$$

ou

$$\left[\varphi_1(D_t)x_1 + \frac{\varphi'_1(D_t)x_1}{1}D_t + \ldots\right]\mathfrak{x}$$
$$+\left[\chi_1(D_t)y_1 + \frac{\chi'_1(D_t)y_1}{1}D_t + \ldots\right](\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) + \ldots = 0,$$

ou, en remarquant que le multiplicateur de $\mathfrak{x}$,

$$\varphi_1(D_t)x_1 + \chi_1(D_t)y_1 + \ldots,$$

est nul, par hypothèse,

$$\left[\frac{\varphi'_1(D_t)x_1}{1} + \frac{\varphi''_1(D_t)x_1}{1.2}D_t + \ldots + \frac{\chi'_1(D_t)y_1}{1} + \ldots\right]D_t\mathfrak{x}$$
$$+ [\chi_1(D_t)y_1 + \ldots]\mathfrak{y} + \ldots = 0;$$

et de même pour les autres équations. Le nouveau système obtenu doit évidemment être de même ordre que le proposé, puisque les deux systèmes d'inconnues sont liés par des équations finies, sans constantes arbitraires; mais le second système ne contenant plus la variable $\mathfrak{x}$ elle-même, mais seulement ses dérivées, peut s'abaisser immédiatement d'une unité, en prenant $D_t\mathfrak{x} = \mathfrak{x}'$ pour nouvelle inconnue.

Si l'on avait, pour $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
&\varphi'_i(D_t)x_1 + \chi'_i(D_t)y_1 + \ldots = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\varphi_i^{(k-1)}(D_t)x_1 + \chi_i^{(k-1)}(D_t)y_1 + \ldots = 0,
\end{aligned}$$

alors les équations ne contiendraient plus que les dérivées de $\mathfrak{x}$ à partir de $D_t^k\mathfrak{x}$, et, en prenant $D_t^k\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^{(k)}$ pour nouvelle inconnue, l'ordre du système serait abaissé de k unités par l'existence du système k-uple d'intégrales $(x_1, y_1, \ldots)$.

947. VI. Les calculs des deux numéros précédents s'appliqueraient aussi au cas où les seconds membres des équations proposées ne seraient pas nuls. On verrait, comme on l'a déjà fait au n° 881, que, si l'on connaît un système d'intégrales particulières $(x_1^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots)$ des équations sans seconds membres

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(D_t)x^{(0)} + \chi_1(D_t)y^{(0)} + \ldots = 0,\\
&\varphi_2(D_t)x^{(0)} + \chi_1(D_t)y^{(0)} + \ldots = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

on pourra, par son moyen, ramener l'intégration du système d'équations complètes (1) à celui d'un système de même forme, mais d'un ordre moindre d'une unité.

Exemple. — Prenons les équations

$$(4 + D_t)x + 3y = t,$$
$$2x + (5 + D_t)y = e^t,$$

qui diffèrent par les seconds membres de celles de l'exemple du n° 945. On obtiendra, en calculant de la même manière, les équations

$$(\text{A}) \qquad \begin{cases} 3e^{-2t}D_t\mathfrak{x} - 6e^{-2t}\mathfrak{y} = t, \\ -6e^{-2t}\mathfrak{y} - 2e^{-2t}D_t(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = e^t, \end{cases}$$

d'où, en éliminant $D_t\mathfrak{x}$,

$$D_t\mathfrak{y} + 5\mathfrak{y} = -\frac{1}{3}te^{2t} - \frac{1}{2}e^{3t}.$$

Cette équation linéaire du premier ordre donne [821]

$$\mathfrak{y} = C_2e^{-5t} - \frac{1}{21}te^{2t} + \frac{1}{147}e^{2t} - \frac{1}{16}e^{3t};$$

substituant cette valeur dans la première équation (A), et intégrant, il viendra

$$\mathfrak{x} = C_1 - \frac{2}{5}C_2e^{-5t} + \frac{5}{42}te^{2t} - \frac{31}{588}e^{2t} - \frac{1}{24}e^{3t}.$$

On en tire enfin, pour les valeurs des inconnues cherchées,

$$x = \quad 3C_1e^{-2t} - \frac{6}{5}C_2e^{-7t} + \frac{5}{14}t - \frac{31}{196} - \frac{1}{8}e^t,$$
$$y = -2C_1e^{-2t} - \frac{6}{5}C_2e^{-7t} - \frac{1}{7}t + \frac{9}{98} + \frac{5}{24}e^t.$$

948. VII. Si l'on désigne par X, Y, ... un système d'intégrales particulières des équations complètes (1) ou (4), et par $x^{(0)}, y^{(0)}, \ldots$ le système des intégrales générales des équations sans seconds membres (5) ou (6), on verrait, en raisonnant comme au n° 884, que les intégrales générales des équations complètes (1) ou (4) seront

$$x = x^{(0)} + \text{X}, \quad y = y^{(0)} + \text{Y}, \quad \ldots.$$

949. VIII. Supposons les seconds membres T_i des équations (1) ou (4) décomposés chacun en plusieurs parties, de sorte que

$$T_i = T_i^{(1)} + T_i^{(2)} + \ldots,$$

et soit $X^{(h)}, Y^{(h)}, \ldots$ un système d'intégrales des équations

$$\varphi_1(D_t)x + \chi_1(D_t)y + \ldots = T_1^{(h)}, \quad \varphi_2(D_t)x + \ldots = T_2^{(h)}, \quad \ldots.$$

On aura un système d'intégrales des équations (1) en prenant

$$X = X^{(1)} + X^{(2)} + \ldots,$$
$$Y = Y^{(1)} + Y^{(2)} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

§ III.

ÉQUATIONS LINÉAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS.

950. Pour intégrer les équations sans seconds membres (5) dans le cas où les coefficients des fonctions $\varphi_1, \chi_1, \ldots, \varphi_2, \ldots$ sont constants, posons

(14) $$x = \xi e^{rt}, \quad y = \eta e^{rt}, \quad \ldots,$$

$r, \xi, \eta, \ldots$ étant des constantes indéterminées, et portons ces valeurs dans les équations (5). En divisant tout par e^{rt}, il restera les équations de condition

(15) $$\begin{cases} \varphi_1(r)\xi + \chi_1(r)\eta + \ldots = 0, \\ \varphi_2(r)\xi + \chi_2(r)\eta + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

pour déterminer les n inconnues $r, \frac{\eta}{\xi}, \ldots$. En éliminant $\xi, \eta, \ldots$, on aura, pour trouver r, l'équation

(16) $$R = \begin{vmatrix} \varphi_1(r) & \chi_1(r) & \ldots \\ \varphi_2(r) & \chi_2(r) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Cette condition étant remplie, il viendra, i étant l'indice d'une

ligne horizontale quelconque,

$$(17)\qquad \xi : \eta : \ldots = \frac{\partial R}{\partial \varphi_i} : \frac{\partial R}{\partial \chi_i} : \ldots,$$

proportions que l'on pourra changer en égalités en prenant, par exemple,

$$(18)\qquad \xi = \frac{\partial R}{\partial \varphi_1}, \quad \eta = \frac{\partial R}{\partial \chi_1}, \quad \ldots.$$

Maintenant, faisons abstraction de la condition $R = 0$, et laissons r quelconque, $\xi, \eta, \ldots$ étant déterminés en r par les équations (18); on aura identiquement, quel que soit r,

$$\varphi_1(r)\frac{\partial R}{\partial \varphi_1} + \chi_1(r)\frac{\partial R}{\partial \chi_1} + \ldots = R,$$
$$\varphi_2(r)\frac{\partial R}{\partial \varphi_2} + \chi_2(r)\frac{\partial R}{\partial \chi_2} + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on substitue dans les premiers membres des équations (5) les expressions (14) en tenant compte des valeurs (18), on aura donc les identités

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi_1(D_t)x + \chi_1(D_t)y + \ldots = e^{rt}R, \\ \varphi_2(D_t)x + \chi_2(D_t)y + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Les équations (5) sont donc vérifiées par les substitutions (14) si la valeur de r, dont dépendent $\xi, \eta, \ldots$, est une racine de l'équation $R = 0$.

Si toutes les racines de l'équation (16) sont inégales, chacune d'elles fournissant un système de valeurs distinctes de $r, \xi, \eta, \ldots$, on tirera des formules (14) autant de systèmes d'intégrales particulières des équations (5) qu'il y aura d'unités dans le degré de R, et l'on voit facilement que ce degré est égal à $l_1 + m_2 + \ldots$ ou à l'ordre N du système d'équations proposé. On connaîtra donc ainsi les intégrales générales des équations (5).

Si l'équation (16) a k racines égales à r, k des systèmes donnés par les formules (14) se confondront en un seul. Mais il est aisé de voir que, dans ce cas, la racine multiple r fournit k systèmes distincts d'intégrales particulières, ce qui complète le nombre N des systèmes nécessaires pour former l'intégrale générale.

On a, en effet, en différentiant $k-1$ fois par rapport à r le système des identités (19), les nouveaux systèmes d'identités

$$(20)\quad \begin{cases} \varphi_1(D_t)\dfrac{\partial x}{\partial r} + \chi_1(D_t)\dfrac{\partial y}{\partial r} + \ldots = e^{rt}(t+D_r)R, \\ \varphi_2(D_t)\dfrac{\partial x}{\partial r} + \chi_2(D_t)\dfrac{\partial y}{\partial r} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(21)\quad \begin{cases} \varphi_1(D_t)\dfrac{\partial^{k-1} x}{\partial r^{k-1}} + \chi_1(D_t)\dfrac{\partial^{k-1} y}{\partial r^{k-1}} + \ldots = e^{rt}(t+D_r)^{k-1}R, \\ \varphi_2(D_t)\dfrac{\partial^{k-1} x}{\partial r^{k-1}} + \chi_2(D_t)\dfrac{\partial^{k-1} y}{\partial r^{k-1}} + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si r est une racine k-uple de l'équation (16), le second membre de la première équation de chacun des systèmes (20), ..., (21) s'évanouira, et, par suite, à la racine r correspondront non-seulement le système d'intégrales

$$x = \frac{\partial R}{\partial \varphi_1} e^{rt}, \quad y = \frac{\partial R}{\partial \chi_1} e^{rt}, \quad \ldots,$$

mais encore les $k-1$ autres systèmes, distincts du premier,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \ldots\right), \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial^{k-1} x}{\partial r^{k-1}}, \frac{\partial^{k-1} y}{\partial r^{k-1}}, \ldots\right).$$

§ IV.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES COMPLÈTES.

951. I. *Méthode des coefficients indéterminés.* — Pour passer de l'intégration des équations sans seconds membres (5) aux équations complètes (1), il suffit [948] de connaître un système d'intégrales particulières de celles-ci.

Lorsque les seconds membres des équations (1) (supposées à coefficients constants) seront ou des polynômes entiers et rationnels en t à coefficients constants, ou des exponentielles $\alpha e^{\lambda t}$ à exposants réels ou imaginaires, ou, ce qui revient au même, des fonc-

tions hyperboliques de la forme $\beta \,{}^{\mathrm{Ch}}_{\mathrm{Sh}}(\mu t + \nu)$, ou des fonctions circulaires de la forme $\beta \,{}^{\cos}_{\sin}(\mu t + \nu)$, on pourra obtenir un système d'intégrales particulières par la méthode des coefficients indéterminés, comme on l'a fait [903] pour une seule équation linéaire entre deux variables. On pourra profiter, dans ce cas, de la faculté de décomposer les valeurs en parties [949].

Quand les seconds membres $T_1, T_2, \ldots$ dépendent d'une même exponentielle et sont de la forme

$$T_1 = \alpha_1 e^{\lambda t}, \quad T_2 = \alpha_2 e^{\lambda t}, \quad \ldots,$$

il est aisé, en général, d'obtenir les valeurs correspondantes des intégrales particulières X, Y, ... En effet, si l'on fait dans les équations (1) les substitutions (14), il vient, en divisant par e^{rt},

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(r)\xi + \chi_1(r)\eta + \ldots = \alpha_1 e^{(\lambda - r)t}, \\ \varphi_2(r)\xi + \chi_2(r)\eta + \ldots = \alpha_2 e^{(\lambda - r)t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Si l'on fait maintenant $r = \lambda$, et que cette valeur n'annule pas le déterminant R [949], on aura, pour déterminer $\xi, \eta, \ldots$, les équations

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(\lambda)\xi + \chi_1(\lambda)\eta + \ldots = \alpha_1, \\ \varphi_2(\lambda)\xi + \chi_2(\lambda)\eta + \ldots = \alpha_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Si la supposition $r = \lambda$ annule le déterminant R, on emploiera alors, pour le calcul de X, Y, ..., des méthodes générales que nous exposerons plus loin.

952. *Exemples.* — I. Soit proposé d'intégrer le système des équations

$$(4 + D_t)x + 3y = t,$$
$$2x + (5 + D_t)y = e^t.$$

Nous chercherons d'abord les intégrales générales des équations sans seconds membres

$$(4 + D_t)x^{(0)} + 3y^{(0)} = 0,$$
$$2x^{(0)} + (5 + D_t)y^{(0)} = 0$$

au moyen des formules

$$x^{(0)} = \xi e^{rt}, \quad y^{(0)} = \eta e^{rt},$$

$$\begin{vmatrix} 4+r & 3 \\ 2 & 5+r \end{vmatrix} = 0,$$

$$\xi = 3, \quad \eta = -4 - r,$$

qui donnent les deux valeurs $r_1 = -2$, $r_2 = -7$, d'où les deux systèmes d'intégrales particulières

$$x_1^{(0)} = 3e^{-2t}, \quad y_1^{(0)} = -2e^{-2t},$$
$$x_2^{(0)} = 3e^{-7t}, \quad y_2^{(0)} = 3e^{-7t},$$

et par suite les intégrales générales

$$x^{(0)} = 3C_1 e^{-2t} + 3C_2 e^{-7t}, \quad y^{(0)} = -2C_1 e^{-2t} + 3C_2 e^{-7t}.$$

Pour avoir X et Y, considérons les seconds membres des équations proposées comme composés chacun de deux parties

$$T_1 = T'_1 + T''_1, \quad T_2 = T'_2 + T''_2,$$

où l'on fera $T'_1 = t$, $T'_2 = 0$, et $T''_1 = 0$, $T''_2 = e^t$. Posons d'abord

$$X' = gt + h, \quad Y' = g't + h'.$$

En substituant dans les équations proposées, et égalant les coefficients des mêmes puissances de t dans les deux membres de chaque équation, on aura les équations

$$4g + 3g' = 1, \quad g + 4h + 3h' = 0,$$
$$2g + 5g' = 0, \quad g' + 2h + 5h' = 0,$$

d'où

$$g = \frac{5}{14}, \quad g' = -\frac{1}{7}, \quad h = -\frac{31}{196}, \quad h' = \frac{9}{98}.$$

Ensuite posons $x = \xi e^t$, $y = \eta e^t$; on aura les équations

$$5\xi + 3\eta = 0, \quad 2\xi + 6\eta = 1,$$

d'où

$$\xi = -\frac{1}{8}, \quad \eta = \frac{5}{24}.$$

Donc les intégrales particulières des équations complètes seront

$$X = \frac{5}{14}t - \frac{31}{196} - \frac{1}{8}e^t,$$
$$Y = -\frac{1}{7}t + \frac{9}{98} + \frac{5}{24}e^t.$$

En ajoutant ces valeurs à celles de $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, on aura les intégrales générales déjà obtenues au n° 947.

II. Soient les équations

$$(3 - D_t^2)x + 4y = 3,$$
$$x + (1 + D_t^2)y = -5.$$

On remplacera d'abord les seconds membres par zéro, et, en posant

$$x^{(0)} = \xi e^{rt}, \quad y^{(0)} = \eta e^{rt},$$

on aura les équations

$$(3 - r^2)\xi + 4\eta = 0,$$
$$\xi + (1 + r^2)\eta = 0,$$

d'où

$$\begin{vmatrix} 3 - r^2 & 4 \\ 1 & 1 + r^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad r^4 - 2r^2 + 1 = 0,$$

ce qui donne les deux racines doubles $r = \pm 1$.

On a ensuite

$$\xi = 1 + r^2, \quad \eta = -1,$$

d'où

$$x^{(0)} = (1 + r^2)e^{rt}, \qquad y^{(0)} = -e^{rt},$$
$$\frac{\partial x^{(0)}}{\partial r} = [2r + (1 + r^2)t]e^{rt}, \qquad \frac{\partial y^{(0)}}{\partial r} = -te^{rt}.$$

Mettant pour r ses valeurs ± 1, on en conclut les valeurs des quatre systèmes d'intégrales particulières qui forment les intégrales générales

$$x^{(0)} = 2C_1e^t + 2C_2(1 + t)e^t + 2C_3e^{-t} + 2C_4(-1 + t)e^{-t},$$
$$y^{(0)} = -C_1e^t - C_2te^t - C_3e^{-t} - C_4te^{-t}.$$

Pour avoir maintenant un système d'intégrales X, Y des équa-

tions complètes, nous prendrons $\lambda = 0$, d'où les équations

$$\varphi_1(0)\xi + \chi_1(0)\eta = \alpha_1, \quad \varphi_2(0)\xi + \chi_2(0)\eta = \alpha_2,$$

c'est-à-dire ici

$$3\xi + 4\eta = 3, \quad \xi + \eta = -5,$$

d'où $X = \xi = -23$, $Y = \eta = 18$. On a donc enfin, pour les intégrales générales des équations complètes,

$$x = x^{(0)} - 23, \quad y = y^{(0)} + 18.$$

953. II. *Méthode de Lagrange, ou méthode de la variation des constantes arbitraires.* — Soient les équations complètes

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi_1(D_t)x + \chi_1(D_t)y + \ldots = T_1, \\ \varphi_2(D_t)x + \chi_2(D_t)y + \ldots = T_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et désignons par

$$(2) \quad \begin{cases} x^{(0)} = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots, \\ y^{(0)} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

les intégrales générales des équations (1) où l'on aurait remplacé les seconds membres par zéro.

Proposons-nous de satisfaire aux équations (1) par des valeurs de $x, y, \ldots$ de même forme que les valeurs (2), mais dans lesquelles $C_1, C_2, \ldots$ désigneront, non plus des constantes, mais des fonctions de t convenablement choisies.

Les conditions (1) sont au nombre de n, et les inconnues C_1, $C_2, \ldots$ au nombre de $l_1 + m_2 + \ldots = N$. On pourra donc disposer à volonté de

$$N - n = (l_1 - 1) + (m_2 - 1) + \ldots$$

d'entre elles, ou, ce qui revient au même, assujettir les inconnues à $N - n$ conditions arbitraires, que l'on choisira de manière à simplifier autant que possible le calcul. Pour cela, on fera en sorte que le calcul se rapproche autant que possible de ce qu'il serait si les quantités $C_1, C_2, \ldots$ étaient des constantes.

Nous poserons, en conséquence, C'_i étant la dérivée $\frac{dC_i}{dt}$,

$$(3)\quad \begin{cases} x = \sum C_i x_i, & y = \sum C_i y_i, & \ldots, \\ x' = \sum C_i x'_i, & y' = \sum C_i y'_i, & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots \\ x^{(l_1-1)} = \sum C_i x_i^{(l_1-1)}, & y^{(m_2-1)} = \sum C_i y_i^{(m_2-1)}, & \ldots \\ x^{(l_1)} = \sum C_i x_i^{(l_1)} + \sum C'_i x_i^{(l_1-1)}, & y^{(m_2)} = \sum C_i y_i^{(m_2)} + \sum C'_i y_i^{(m_2-1)}, & \ldots, \end{cases}$$

en prenant pour conditions arbitraires les suivantes :

$$(4)\quad \begin{cases} \sum C'_i x_i = 0, & \sum C'_i y_i = 0, & \ldots, \\ \sum C'_i x'_i = 0, & \sum C'_i y'_i = 0, & \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, \\ \sum C'_i x_i^{(l_1-2)} = 0, & \sum C'_i y_i^{(m_2-2)} = 0, & \ldots \end{cases}$$

La substitution de ces valeurs dans les équations (1) donne, en désignant par $a_1^{(l_1)}$, $a_2^{(l_1)}$, ... les coefficients de $D_t^{l_1}$ dans $\varphi_1(D_t)$, $\varphi_2(D_t)$, ..., et de même pour les autres,

$$(5)\quad \begin{cases} a_1^{(l_1)} \sum C'_i x_i^{(l_1-1)} + b_1^{(m_2)} \sum C'_i y_i^{(m_2-1)} + \ldots = T_1, \\ a_2^{(l_1)} \sum C'_i x_i^{(l_1-1)} + b_2^{(m_2)} \sum C'_i y_i^{(m_2-1)} + \ldots = T_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

équations qui, jointes aux équations (4), forment le nombre d'équations nécessaire pour la détermination de $C'_1, C'_2, \ldots, C'_N$. De ces dernières quantités on déduira ensuite $C_1, C_2, \ldots, C_N$ par des quadratures.

En particulier, si l'on donne les équations du premier ordre à coefficients constants

$$\begin{gathered} (a_1 + a'_1 D_t)x + b_1 y + \ldots = T_1, \\ a_2 x + (b_2 + b'_2 D_t)y + \ldots = T_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

les intégrales particulières $x_i, y_i, \ldots$ sont [950] de la forme $\xi_i e^{r_i t}$, $\eta_i e^{r_i t}$, ..., et les équations (5) deviennent

$$\begin{gathered} \xi_1 e^{r_1 t} C'_1 + \xi_2 e^{r_2 t} C'_2 + \ldots = \frac{T_1}{a'_1}, \\ \eta_1 e^{r_1 t} C'_1 + \eta_2 e^{r_2 t} C'_2 + \ldots = \frac{T_2}{b'_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Si l'on fait

$$R = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots \\ .. & .. & \dots \end{vmatrix}, \qquad R_i = \frac{T_1}{a'_1}\frac{\partial R}{\partial \xi_i} + \frac{T_2}{b'_2}\frac{\partial R}{\partial \eta_i} + \dots,$$

on aura, dans le cas où les racines $r_1, r_2, \dots$ sont inégales,

$$C'_i = e^{-r_i t}\frac{R_i}{R}, \quad \text{d'où} \quad C_i = c_i + \int e^{-r_i t}\frac{R_i}{R}\,dt,$$

et par suite

$$x = \Sigma c_i \xi_i e^{r_i t} + \Sigma \xi_i \int e^{-r_i t}\frac{R_i}{R}\,dt, \quad y = \Sigma c_i \eta_i e^{r_i t} + \Sigma \eta_i \int e^{-r_i t}\frac{R_i}{R}\,dt, \quad \dots.$$

934. *Exemples.* — I. Reprenons l'exemple I du n° 932 :

$$(4 + D_t)x + 3y = t,$$
$$2x + (5 + D_t)y = e^t.$$

Ses intégrales seront de la forme

$$x = \quad 3C_1 e^{-2t} + 3C_2 e^{-7t},$$
$$y = -2C_1 e^{-2t} + 3C_2 e^{-7t}.$$

D'après cela, les équations (5) qui serviront à déterminer C_1 et C_2 seront

$$3e^{-2t}C'_1 + 3e^{-7t}C'_2 = t, \quad -2e^{-2t}C'_1 + 3e^{-7t}C'_2 = e^t,$$

d'où

$$C'_1 = \frac{1}{5}(te^{2t} - e^{3t}), \quad C'_2 = \frac{1}{5}e^{8t} + \frac{2}{15}te^{7t}$$

et par suite, c_1, c_2 étant des constantes arbitraires,

$$C_1 = c_1 + \frac{1}{20}(2t - 1)e^{2t} - \frac{1}{15}e^{3t}, \quad C_2 = c_2 + \frac{1}{40}e^{8t} + \frac{2}{735}(7t - 1)e^{7t}.$$

Substituant ces valeurs dans les expressions de x et de y, on retrouvera les mêmes valeurs que précédemment.

II. Soient les deux équations

$$(-8 + D_t)x + y = e^t, \quad -25x + (2 + D_t)y = 3t.$$

En opérant comme précédemment, on trouve

$$r^2 - 6r + 9 = 0, \quad \xi = 1, \quad \eta = 8 - r,$$

d'où $r_1 = r_2 = 3$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 5$. On a donc

$$x_1 = e^{3t}, \quad y_1 = 5e^{3t}.$$

En différentiant maintenant par rapport à r les expressions

$$x = e^{rt}, \quad y = (8 - r)e^{rt},$$

puis faisant $r = 3$, on a le second système d'intégrales particulières

$$x_2 = -te^{3t}, \quad y_2 = (1 - 5t)e^{3t}.$$

En achevant le calcul comme ci-dessus, on a pour résultat

$$x = (C_1 - C_2 t)e^{3t} + \frac{3}{4}e^t - \frac{1}{3}t - \frac{2}{9},$$
$$y = [5C_1 + C_2(1 - 5t)]e^{3t} + \frac{25}{4}e^t - \frac{8}{3}t - \frac{13}{9}.$$

III. On peut ramener à l'intégration d'un système d'équations de la forme que nous venons de considérer l'intégration de l'équation

$$(ax + by + c)\,dx + (a'x + b'y + c')\,dy = 0,$$

traitée au n° **817**, en la remplaçant par les deux équations

$$\frac{dx}{a'x + b'y + c'} = \frac{dy}{-ax - by - c} = dt,$$

ou

$$\frac{dx}{dt} - a'x - b'y = c', \quad \frac{dy}{dt} + ax + by = -c.$$

IV. Si l'on donnait les équations plus générales

$$\frac{dt}{T} = \frac{dx}{ax + by + \ldots + X} = \frac{dy}{a'x + b'y + \ldots + Y} = \ldots,$$

$T, X, Y, \ldots$ étant des fonctions données de t, et $a, b, \ldots, a', b', \ldots$ des constantes, on les ramènerait aux équations (1) en prenant $t' = \int \frac{dt}{T}$ pour nouvelle variable indépendante et en exprimant $X, Y, \ldots$ par son moyen.

V. En particulier, les équations

$$(\alpha t + \beta)\frac{dx}{dt} + a_1 x + b_1 y + \ldots = 0,$$

$$(\alpha t + \beta)\frac{dy}{dt} + a_2 x + b_2 y + \ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où α, β, a_1, b_1, ..., a_2, b_2, ... sont des constantes, peuvent se traiter d'une manière analogue à celle que nous avons appliquée à l'équation des nos 897 et 898. On en obtiendrait des intégrales particulières en posant

$$x = \xi(at + b)^r, \quad y = \eta(at + b)^r, \quad \ldots,$$

r, ξ, η, ... étant des constantes indéterminées.

VI. Plus généralement, si l'on donne des équations de la forme

$$\begin{aligned} &\varphi_1(tD_t)x + \chi_1(tD_t)y + \ldots = T_1, \\ &\varphi_2(tD_t)x + \chi_2(tD_t)y + \ldots = T_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

on les ramènera au cas d'équations à coefficients constants en posant $t = e^\theta$, et alors [897] les équations prennent la forme

$$\begin{aligned} &\varphi_1^{\underline{|0}}(D_\theta)x + \chi_1^{\underline{|0}}(D_\theta)y + \ldots = T_1, \\ &\varphi_2^{\underline{|0}}(D_\theta)x + \chi_2^{\underline{|0}}(D_\theta)y + \ldots = T_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

VII. Reprenons les équations du n° 952, II. Ici $l_1 = 2$, $m_2 = 2$, et, en posant, pour abréger,

$$C'_1 e^t = u_1, \quad C'_2 e^t = u_2, \quad C'_3 e^{-t} = u_3, \quad C'_4 e^{-t} = u_4,$$

les équations (4) et (5) deviennent

$$\begin{aligned} &u_1 + (1 + t)u_2 + u_3 + (-1 + t)u_4 = 0, \\ &u_1 + \quad t\, u_2 + u_3 + \quad t\, u_4 = 0, \\ &u_1 + (2 + t)u_2 - u_3 + (2 - t)u_4 = -\frac{3}{2}, \\ &u_1 + (1 + t)u_2 - u_3 + (1 - t)u_4 = 5. \end{aligned}$$

En combinant ces équations, on en tire

$$u_2 - u_4 = 0, \qquad u_1 + u_3 = \frac{13}{2} t,$$

$$u_2 + u_4 = -\frac{13}{2}, \quad u_1 - u_3 = \frac{23}{2},$$

d'où

$$u_2 = u_4 = -\frac{13}{4}, \quad u_1 = \frac{23 + 13t}{4}, \quad u_3 = \frac{-23 + 13t}{4}.$$

Par suite,

$$C'_1 = \frac{23 + 13t}{4} e^{-t}, \qquad C_1 = -\frac{36 + 13t}{4} e^{-t},$$

$$C'_2 = -\frac{13}{4} e^{-t}, \qquad C_2 = \frac{13}{4} e^{-t},$$

$$C'_3 = \frac{-23 + 13t}{4} e^{t}, \quad C_3 = \frac{-36 + 13t}{4} e^{t},$$

$$C'_4 = -\frac{13}{4} e^{t}, \qquad C_4 = -\frac{13}{4} e^{t}.$$

Substituant ces valeurs de C_1, C_2, C_3, C_4, il vient

$$X = -23, \quad Y = 18.$$

VIII. Soient encore les équations

$$(2 - D_t)x + (-9 + 2D_t)y = 0,$$

$$(-6 + 5D_t - D_t^2)x + (1 + D_t)y = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = T.$$

En posant $x = \xi e^{rt}$, $y = \eta e^{rt}$, les équations sans seconds membres deviendront

$$(2 - r)\xi + (-9 + r)\eta = 0,$$

$$(-6 + 5r - r^2)\xi + (1 + r)\eta = 0,$$

d'où

$$\begin{vmatrix} 2 - r & -9 + 2r \\ -6 + 5r - r^2 & 1 + r \end{vmatrix} = 0,$$

$$r = 2 \text{ et } 4 \pm \sqrt{3}, \quad \xi = 9 - 2r, \quad \eta = 2 - r.$$

Pour passer aux équations complètes, on posera

$$\begin{aligned} x &= \sum C_i \xi_i e^{r_i t}, & y &= \sum C_i \eta_i e^{r_i t},\\ x' &= \sum C_i \xi_i r_i e^{r_i t}, & y' &= \sum C_i \eta_i r_i e^{r_i t} + \sum C'_i \eta_i e^{r_i t},\\ x'' &= \sum C_i \xi_i r_i^2 e^{r_i t} + \sum C'_i \xi_i r_i e^{r_i t}, \end{aligned}$$

et l'on aura, pour déterminer les quantités C'_i, les conditions suivantes :

$$\sum C'_i \xi_i e^{r_i t} = 0, \quad \sum C'_i \eta_i e^{r_i t} = 0, \quad \sum C'_i \xi_i r_i e^{r_i t} = -T,$$

ou, en posant $C'_i e^{r_i t} = u_i$,

$$\sum \xi_i u_i = 0, \quad \sum \eta_i u_i = 0, \quad \sum r_i \xi_i u_i = -T.$$

Le déterminant de ces équations est

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ r_1\xi_1 & r_2\xi_2 & r_3\xi_3 \end{vmatrix} = r_1\xi_1 \begin{vmatrix} 9-2r_2 & 9-2r_3 \\ 2-r_2 & 2-r_3 \end{vmatrix} + \ldots,$$

et, à cause de

$$\begin{vmatrix} 9-2r_2 & 9-2r_3 \\ 2-r_2 & 2-r_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9, & -2 \\ 2, & -1 \end{vmatrix} (r_3 - r_2) = 5(r_2 - r_3), \quad \ldots,$$

ce déterminant devient

$$\begin{aligned} 5\xi_1 r_1 (r_2 - r_3) + \ldots &= 5(9 - 2r_1) r_1 (r_2 - r_3) + \ldots \\ &= 45[r_1(r_2 - r_3) + r_2(r_3 - r_1) + r_3(r_1 - r_2)] \\ &\quad - 10[r_1^2(r_2 - r_3) + r_2^2(r_3 - r_1) + r_3^2(r_1 - r_2)] \\ &= -10[r_1^2(r_2 - r_3) - r_1(r_2 - r_3)(r_2 + r_3) + r_2 r_3 (r_2 - r_3)], \end{aligned}$$

ou enfin, à cause de $r_1 = 2$, $r_2 - r_3 = 2\sqrt{3}$, $r_2 + r_3 = 8$, $r_2 r_3 = 13$,

$$\text{déterminant} = -20\sqrt{3}.$$

Les déterminants mineurs proportionnels aux inconnues ont pour valeurs

$$10\sqrt{3}, \quad 5(-2+\sqrt{3}), \quad 5(-2-\sqrt{3}),$$

et les valeurs des inconnues sont

$$u_1 = -\frac{1}{2}T, \quad u_2 = \frac{-2+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}T, \quad u_3 = \frac{-2-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}T.$$

Etc.

955. III. *Méthode de Cauchy*. — Supposons toujours que l'on ait trouvé les intégrales générales $x^{(0)}, y^{(0)}, \ldots$ des équations

$$(1)\quad \begin{cases} (a_1 + D_t)x + b_1 y + \ldots = T_1, \\ a_2 x + (b_2 + D_t)y + \ldots = T_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

dont on aurait annulé les seconds membres. Nous allons obtenir, au moyen de ces intégrales, un système d'intégrales particulières X, Y, ... des équations complètes, et l'on aura alors les intégrales générales de ces dernières équations par la règle du n° 948.

Pour cela, déterminons d'abord les constantes $C_1, C_2, \ldots$, qui entrent dans les expressions

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots, \\ y^{(0)} &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

de manière que, en donnant à t la valeur indéterminée α, et désignant par $x^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}, \ldots, T_1^{(\alpha)}, T_2^{(\alpha)}, \ldots$ ce que deviennent les fonctions $x^{(0)}, y^{(0)}, \ldots, T_1, T_2, \ldots$ pour $t = \alpha$, on ait

$$x^{(\alpha)} = T_1^{(\alpha)}, \quad y^{(\alpha)} = T_2^{(\alpha)}, \quad \ldots.$$

Si l'on désigne par $x_0, y_0, \ldots$ ce que deviennent $x^{(0)}, y^{(0)}, \ldots$ lorsqu'on attribue aux constantes arbitraires les valeurs ainsi déterminées en fonction de α, je dis que les quantités

$$X = \int_{t_0}^{t} x_0\, d\alpha, \quad Y = \int_{t_0}^{t} y_0\, d\alpha, \quad \ldots,$$

où t_0 représente une constante absolue quelconque, formeront un système d'intégrales particulières des équations (4).

En effet, si l'on différentie ces équations par rapport à t, les quantités $x_0, y_0, \ldots$ prenant, pour $\alpha = t$, les valeurs $T_1, T_2, \ldots$, il viendra [470]

$$\frac{dX}{dt} = \int_{t_0}^{t} \frac{dx_0}{dt}\, d\alpha + T_1, \quad \frac{dY}{dt} + \int_{t_0}^{t} \frac{dy_0}{dt}\, d\alpha + T_2, \quad \ldots.$$

Substituant ces valeurs et celles de X, Y, ... dans une quelconque

des équations (1), dans la première, par exemple, le premier membre devient

$$\int_{t_0}^{t}\left(\frac{dx_0}{dt}+a_1x_0+b_1y_0+\ldots\right)dz,$$

quantité nulle, puisque $x_0, y_0, \ldots$ forment un système d'intégrales particulières des équations sans seconds membres. Donc les valeurs ci-dessus de X, Y, ... forment un système d'intégrales particulières des équations (1).

Exemple. — Soient proposées les deux équations

$$4\frac{dx}{dt}+9\frac{dy}{dt}+2x+31y=e^t,$$

$$3\frac{dx}{dt}+7\frac{dy}{dt}+x+24y=3.$$

Les intégrales des équations sans seconds membres correspondantes sont

$$x^{(0)}=C_1x_1+C_2x_2,\quad y^{(0)}=\lambda_1C_1x_1+\lambda_2C_2x_2,$$

en posant

$$x_1=e^{r_1t},\quad x_2=e^{r_2t},\quad r_1=-4-i,\quad r_2=-4+i,$$
$$\lambda_1=-1+i,\quad \lambda_2=-1-i.$$

Il faut faire maintenant $t=\alpha$ et résoudre par rapport à C_1, C_2 les équations $x^{(\alpha)}=T_1^{(\alpha)}$, $y^{(\alpha)}=T_2^{(\alpha)}$, qui ne sont autre chose que ce que deviennent les équations différentielles proposées lorsqu'on y remplace $\frac{dx}{dt}$ par $x^{(\alpha)}$, $\frac{dy}{dt}$ par $y^{(\alpha)}$, x et y par zéro, et t par α. On a donc ici les équations

$$4x^{(\alpha)}+9y^{(\alpha)}=e^{\alpha},\quad 3x^{(\alpha)}+7y^{(\alpha)}=3,$$

d'où l'on tire, en mettant pour $x^{(\alpha)}$, $y^{(\alpha)}$ leurs expressions, puis résolvant par rapport à C_1 et à C_2,

$$C_1=\frac{7-4i}{2}e^{\;(r_1-1)\alpha}-\frac{3(9-5i)}{2}e^{-r_1\alpha},$$

$$C_2=-\frac{7+4i}{2}e^{-(r_2-1)\alpha}+\frac{3(9+5i)}{2}e^{-r_2\alpha}.$$

Substituant ces valeurs dans les expressions de $x^{(0)}$ et de $y^{(0)}$, intégrant par rapport à α, puis faisant $\alpha = t$, il vient, toutes réductions faites,

$$X = \frac{31}{26}e^t - \frac{93}{17}, \quad Y = -\frac{2}{13}e^t + \frac{6}{17},$$

valeurs que l'on aurait obtenues plus promptement par la méthode particulière du n° 951. On aura donc enfin, pour les intégrales générales des équations proposées,

$$x = Ce^{4t}\cos t + C'e^{4t}\sin t + \frac{31}{26}e^t - \frac{93}{17},$$
$$y = -Ce^{4t}(\cos t + \sin t) + C'e^{4t}(\cos t - \sin t) - \frac{2}{13}e^t + \frac{6}{17}.$$

956. IV. *Méthode de d'Alembert.* — Supposons les équations différentielles linéaires mises sous la forme d'équations du premier ordre et, pour plus de simplicité, résolues par rapport aux dérivées des inconnues. Elles seront alors de la forme

$$(1)\quad \begin{cases} (a_1 + D_t)x + b_1 y + c_1 z + \ldots = T_1, \\ a_2 x + (b_2 + D_t) y + c_2 z + \ldots = T_2, \\ a_3 x + b_3 y + (c_3 + D_t) z + \ldots = T_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Multiplions ces équations respectivement par $1, \lambda, \mu, \ldots$, en désignant par $\lambda, \mu, \ldots$ des indéterminées, et ajoutons-les. Il viendra

$$(2)\quad \left.\begin{array}{l} D_t x + \lambda D_t y + \mu D_t z + \ldots \\ + (a_1 + a_2\lambda + a_3\mu + \ldots)x \\ + (b_1 + b_2\lambda + b_3\mu + \ldots)y \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = T,$$

en faisant, pour abréger,

$$T = T_1 + \lambda T_2 + \mu T_3 + \ldots.$$

Si l'on pose maintenant

$$(3)\quad u = x + \lambda y + \mu z + \ldots,$$

d'où

$$dx + \lambda dy + \mu dz + \ldots = du - x\,d\lambda - y\,d\mu - \ldots,$$

l'équation (2) deviendra

$$(D_t u - y D_t \lambda - z D_t \mu - \ldots) + (a_1 + a_2 \lambda + a_3 \mu + \ldots)(u - \lambda y - \mu z - \ldots)$$
$$+ (b_1 + b_2 \lambda + b_3 \mu + \ldots) y$$
$$+ (c_1 + c_2 \lambda + c_3 \mu + \ldots) z + \ldots = \mathrm{T}.$$

Les variables y, z, ... n'entrant plus dans cette équation par leurs dérivées, on pourra profiter de l'indétermination de λ, μ, ... pour faire disparaître y, z, ... de cette équation, en posant

$$(4)\quad \begin{cases} D_t \lambda + (a_1 + a_2 \lambda + a_3 \mu + \ldots) \lambda = b_1 + b_2 \lambda + b_3 \mu + \ldots, \\ D_t \mu + (a_1 + a_2 \lambda + a_3 \mu + \ldots) \mu = c_1 + c_2 \lambda + c_3 \mu + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et l'équation précédente deviendra

$$(5)\qquad D_t u + (a_1 + a_2 \lambda + a_3 \mu + \ldots) u = \mathrm{T},$$

équation linéaire du premier ordre, que l'on saura intégrer dès que l'on connaîtra un système de valeurs des quantités λ, μ, ...

A chaque système de valeurs particulières λ_1, μ_1, ... de ces quantités correspondra une valeur u_1 de u, et l'équation (3) donnera une relation finie entre x, y, z, ..., qui permettra d'abaisser d'une unité l'ordre du système (1). Si l'on a n systèmes distincts de valeurs de λ, μ, ..., les n équations que fournira la formule (3) seront les intégrales générales des équations (1).

957. Si les équations (1) sont à coefficients constants, les équations (4) admettront des systèmes de valeurs constantes pour λ, μ, ... En posant

$$a_1 + a_2 \lambda + a_3 \mu + \ldots = \frac{b_1 + b_2 \lambda + b_3 \mu + \ldots}{\lambda}$$
$$= \frac{c_1 + c_2 \lambda + c_3 \mu + \ldots}{\mu} = \ldots = r,$$

les équations (4) deviendront

$$(6)\quad \begin{cases} a_1 - r + a_2 \lambda + a_3 \mu + \ldots = 0, \\ b_1 + (b_2 - r) \lambda + b_3 \mu + \ldots = 0, \\ c_1 + c_2 \lambda + (c_3 - r) \mu + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

d'où l'on tire, pour déterminer r, l'équation

(7) $$R = \begin{vmatrix} a_1 - r & a_2 & a_3 & \dots \\ b_1 & b_2 - r & b_3 & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 - r & \dots \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

puis

$$\begin{aligned} 1 : \lambda : \mu : \ldots &= \frac{\partial R}{\partial a_1} : \frac{\partial R}{\partial a_2} : \frac{\partial R}{\partial a_3} : \ldots \\ &= \frac{\partial R}{\partial b_1} : \frac{\partial R}{\partial b_2} : \frac{\partial R}{\partial b_3} : \ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

L'équation (4) prend alors la forme

$$D_t u + ru = T,$$

d'où

$$u = e^{-rt}\left(C + \int e^{rt} T\, dt\right) \quad (^1).$$

958. Considérons, en particulier, le cas de deux équations à deux inconnues

(8) $$\begin{cases} (a_1 + D_t)x + b_1 y = T_1, \\ a_2 x + (b_2 + D_t) y = T_2. \end{cases}$$

La première équation (4) deviendra, dans la supposition de $D_t \lambda = 0$,

(9) $$a_2 \lambda^2 + (a_1 - b_2)\lambda - b_1 = 0.$$

Si cette équation admet une racine constante, cette racine sera une intégrale particulière de l'équation

(10) $$D_t \lambda + (a_1 + a_2 \lambda)\lambda = b + b_2 \lambda,$$

et l'on s'en servira pour abaisser l'ordre du système (8).

Si l'équation (9) admet deux racines constantes, elle sera alors de la forme

(11) $$a_2(\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta) = 0,$$

---

(1) r pourrait être variable en même temps que $a_1, a_2, \ldots$, pourvu que les valeurs de $\lambda, \mu, \ldots$ fussent constantes. Dans ce cas, on écrirait $\int r\, dt$ au lieu de rt.

α et β étant des coefficients constants, et ces deux racines constantes, étant des intégrales particulières de (10), donneront deux équations (5), et par suite deux équations (3),

$$u_1 = x + \lambda_1 y, \quad u_2 = x + \lambda_2 y,$$

d'où l'on tirera x et y en t.

Remarquons que, dans ce cas, on peut intégrer complétement l'équation (5), qui peut s'écrire sous la forme

$$(12) \qquad a_2 dt + \frac{d\lambda}{\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta} = 0.$$

Si, en particulier, les deux racines constantes de l'équation (9) ou (11) sont égales, alors cette équation ne fournira plus qu'une seule intégrale particulière λ_1 de l'équation (10); mais alors on prendra l'intégrale générale de l'équation (12), qui devient alors

$$a_2 dt + \frac{d\lambda}{(\lambda - \lambda_1)^2} = 0,$$

et d'où l'on tire

$$\lambda = \lambda_1 + \frac{1}{\int a_2\, dt + C}.$$

Cette intégrale donne $\lambda = \lambda_1$ pour $C = \infty$. En attribuant à C une autre valeur quelconque, on aura une seconde intégrale particulière λ_2 de l'équation (12), distincte de λ_1.

959. *Exemple.* — Soient proposées les équations

$$\frac{dx}{dt} + 5x - 2y = e^t,$$

$$\frac{dy}{dt} - x + 6y = e^{2t}.$$

Les coefficients étant constants, on formera l'équation (7), qui sera

$$\begin{vmatrix} 5 - r & -1 \\ -2 & 6 - r \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad r^2 - 11r + 28 = 0.$$

On en tire $r_1 = 4$, $r_2 = 7$, d'où $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$; substituant ces deux systèmes de valeurs dans l'équation (5), on a les deux équa-

tions

$$\frac{du_1}{dt} + 4u_1 = e^t + e^{2t},$$

$$\frac{du_2}{dt} + 7u_2 = e^t - e^{2t},$$

qui donnent

$$u_1 = C_1 e^{-4t} + \frac{1}{5} e^t + \frac{1}{6} e^{2t},$$

$$u_2 = C_2 e^{-7t} + \frac{1}{8} e^t - \frac{2}{9} e^{2t}.$$

Enfin, en portant ces systèmes de valeurs dans l'équation

$$u = x + \lambda y,$$

on en tire, pour les intégrales générales du système proposé,

$$x = \frac{2}{3} C_1 e^{-4t} + \frac{1}{3} C_2 e^{-7t} + \frac{7}{40} e^t + \frac{1}{27} e^{2t},$$

$$y = \frac{1}{3} C_1 e^{-4t} - \frac{1}{3} C_2 e^{-7t} + \frac{1}{40} e^t + \frac{7}{54} e^{2t}.$$

960. Soient maintenant trois équations linéaires simultanées

$$(13)\qquad \begin{cases} (a_1 + D_t)x + b_1 y + c_1 z = T_1, \\ a_2 x + (b_2 + D_t)y + c_2 z = T_2, \\ a_3 x + b_3 y + (c_3 + D_t)z = T_3. \end{cases}$$

On ramènera le problème à l'intégration des trois équations

$$(14)\qquad \begin{cases} D_t\lambda + (a_1 + a_2\lambda + a_3\mu)\lambda = b_1 + b_2\lambda + b_3\mu, \\ D_t\mu + (a_1 + a_2\lambda + a_3\mu)\mu = c_1 + c_2\lambda + c_3\mu, \end{cases}$$

$$(15)\qquad D_t u + (a_1 + a_2\lambda + a_3\mu)u = T_1 + T_2\lambda + T_3\mu.$$

Au moyen d'un ou de deux systèmes d'intégrales particulières des équations (14), qui fourniront une ou deux formes intégrables de l'équation (15), on pourra abaisser l'ordre du système (13) d'une ou de deux unités. Si l'on a trois systèmes d'intégrales des équations (14), et par suite les intégrales des trois équations (15) correspondantes, on arrivera aux trois équations

$$u_1 = x + \lambda_1 y + \mu_1 z, \quad u_2 = x + \lambda_2 y + \mu_2 z, \quad u_3 = x + \lambda_3 y + \mu_3 z,$$

qui seront les intégrales complètes des équations proposées.

961. Si les deux équations

$$(16)\qquad \begin{cases} (a_1 + a_2\lambda + a_3\mu)\lambda = b_1 + b_2\lambda + b_3\mu, \\ (a_1 + a_2\lambda + a_3\mu)\mu = c_1 + c_2\lambda + c_3\mu \end{cases}$$

admettent un système de solutions constantes $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \mu_1$, λ_1 et μ_1 seront des intégrales particulières des équations (4).

Si les équations (16) admettent trois systèmes de solutions constantes qui seront trois systèmes d'intégrales particulières des équations (4), on en tirera les intégrales complètes des équations proposées. Il suffit pour cela que les coefficients $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ soient tous constants, ou égaux à des constantes multipliées par un même facteur V, fonction de t. Dans ce cas, les équations (4) sont intégrables. Posons, en effet, pour abréger,

$$a_1 + a_2\lambda + a_3\mu = \mathrm{AV}, \quad b_1 + b_2\lambda + c_2\mu = \mathrm{BV}, \quad c_1 + c_2\lambda + c_3\mu = \mathrm{CV}.$$

Les équations (4) pourront s'écrire

$$\frac{d\lambda}{\mathrm{V}\,dt} + \mathrm{A}\lambda = \mathrm{B},$$

$$\frac{d\mu}{\mathrm{V}\,dt} + \mathrm{A}\mu = \mathrm{C},$$

d'où, en éliminant $\mathrm{V}\,dt$,

$$(17)\qquad \mathrm{A}(\lambda\,d\mu - \mu\,d\lambda) - \mathrm{B}\,d\mu + \mathrm{C}\,d\lambda = 0,$$

équation de même forme que celle que nous avons intégrée au n° 842. Connaissant μ en fonction de λ ou λ en fonction de μ, on aura la valeur de t par l'une des formules

$$\int \mathrm{V}\,dt = \int \frac{d\lambda}{\mathrm{B} - \mathrm{A}\lambda} = \int \frac{d\mu}{\mathrm{C} - \mathrm{A}\mu}.$$

CHAPITRE VI.

DU CALCUL DES VARIATIONS.

§ I.

OBJET DU CALCUL DES VARIATIONS. — VARIATION D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE.

962. Soient y une fonction indéterminée de x, et

$$V = f(x, y, y', y'', \ldots)$$

une fonction, de forme donnée, de x, de y et des dérivées de y. L'intégrale définie

$$u = \int_{x_0}^{x_1} V\,dx,$$

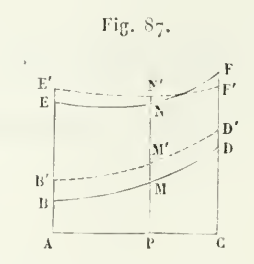
prise entre des limites constantes ou variables x_0 et x_1, changera de valeur suivant la relation que l'on établira entre x et y et suivant les valeurs des limites x_0 et x_1, si celles-ci sont variables.

On peut se proposer de déterminer la fonction inconnue y (et, s'il y a lieu, les limites x_0 et x_1) de manière que l'intégrale u prenne une valeur maximum ou minimum parmi toutes les valeurs qui correspondent à des déterminations de la fonction y (et des limites) infiniment voisines de la détermination que l'on cherche.

En d'autres termes, en supposant d'abord que x_0, x_1 soient des quantités données, si, pour chacune des différentes courbes BMD, B′M′D′, ..., qui représentent les différentes déterminations de la fonction y, on construit les courbes correspondantes ENF, E′N′F′, ...,

(*fig.* 87), dont les ordonnées représentent les valeurs de la fonction V pour les mêmes abscisses, on peut demander à laquelle des courbes BMD, B′M′D′, ..., représentant y, correspond celle des courbes ENF, E′N′F′, ..., représentant V, dont l'aire AENFC est

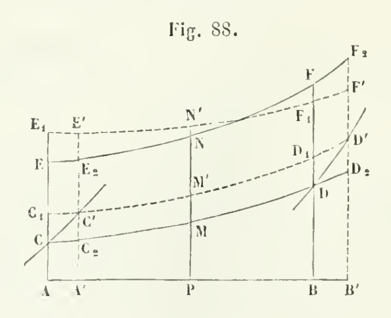
Fig. 87.



un maximum ou un minimum parmi les aires de toutes les courbes V infiniment voisines, A et C étant les points de l'axe des x.

Plus généralement, en supposant les limites x_0, x_1 variables, de façon, par exemple, que les extrémités de la courbe des y soient assujetties à se mouvoir sur deux courbes données CC′, DD (*fig.* 88), alors aux courbes CD, C′D′, ... correspondent, comme représentations de V, les courbes EF, E′F′, ..., qui se termineront,

Fig. 88.



comme les premières, à des abscisses variables d'une courbe à l'autre. On aura alors à décider laquelle des aires AEFB, A′E′F′B′, ... a une valeur maximum ou minimum.

La résolution de ce problème et des questions analogues forme l'objet principal du *Calcul des variations*.

963. On donne le nom de *variations* aux accroissements infiniment petits, tels que MM′, que subissent l'ordonnée y et les quan-

tités qui en dépendent, lorsqu'on passe d'un point M d'une courbe au point M' de la courbe voisine qui correspond à la même abscisse [1], et l'on désigne ces variations par la caractéristique δ.

On a ainsi

$$MM' = \delta y, \quad NN' = \delta V.$$

Nous désignerons pareillement par la caractéristique δ les accroissements des limites

$$AA' = \delta x_0, \quad BB' = \delta x_1,$$

ainsi que tous les accroissements qui dépendront de ceux-là.

964. Lorsqu'on passe de la courbe CD à la courbe C'D', la valeur de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} V\,dx$ est représentée par la différence des aires AEFB, A'E'F'B'. En négligeant les infiniment petits du second ordre, on voit, comme nous l'avons déjà dit à propos de la différentiation sous le signe $\int$ [470], que cette différence est égale à

$$EFF_1E_1 - AEE_2A' + BFF_2B',$$

en considérant, dans EFF_1E_1, comme négative la partie de l'aire comprise entre les deux courbes, pour laquelle E' F' est au-dessous de EF. Or ces trois aires ont pour valeurs respectives

$$EFF_1E_1 = \int_{x_0}^{x_1} \delta V\,dx, \quad AEE_2A' = V_0\,\delta x_0, \quad BFF_2B' = V_1\,\delta x_1.$$

Donc

$$\delta u = \delta \int_{x_0}^{x_1} V\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta V\,dx - V_0\,\delta x_0 + V_1\,\delta x_1,$$

ou, en faisant usage d'une notation abrégée que nous avons déjà employée, et posant, en général, $X_1 - X_0 = [X]_0^1$,

$$(1) \qquad \delta \int_{x_0}^{x_1} V\,dx = [V\,\delta x]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} \delta V\,dx,$$

---

(1) Ne devant nous occuper ici que de la variation des intégrales simples, nous avons pu, sans inconvénient, adopter la simplification qui consiste à prendre pour points correspondants des deux courbes ceux qui ont la même abscisse, ou à supposer $\delta x = 0$.

formule qui contient comme cas particulier celle de la différentiation sous le signe $\int$.

Si l'on connaissait les équations des deux courbes CD, C'D', on connaîtrait en fonction de x les valeurs des différences δy, $\delta y'$, $\delta y''$, ... pour les deux courbes ; on pourrait, par suite, obtenir

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial V}{\partial y''}\delta y'' + \ldots,$$

puis l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta V\, dx.$$

On aurait également $V_0 \delta x_0$ et $V_1 \delta x_1$.

965. Avant de chercher les conditions du maximum ou du minimum de l'aire de la courbe EF, considérons, au lieu de courbes, deux polygones CD, EF, en supposant que les sommets du second aient les mêmes abscisses que ceux du premier, et que, pour plus de simplicité, ces abscisses soient fixées d'avance. De plus, les ordonnées des sommets du polygone EF dépendent, suivant une loi connue, des ordonnées des sommets du polygone CD, qui sont les variables indépendantes avec lesquelles varient tous les éléments de la figure, et en particulier l'aire du polygone EF. La variation δu de cette aire sera une fonction de toutes les variations des ordonnées des sommets du polygone CD.

Pour que l'aire du polygone EF soit un maximum ou un minimum, il faut que la variation δu conserve toujours le même signe, quel que soit celui des polygones infiniment voisins de CD que l'on compare à CD. D'après ce que nous avons vu sur les maxima et minima des fonctions de plusieurs variables indépendantes [403], il faut pour cela que le polygone correspondant au maximum ou au minimum soit tel que la partie de δu qui est infiniment petite du premier ordre s'évanouisse, quelles que soient les variations des variables indépendantes. On devra donc égaler à zéro le coefficient de la première puissance de la variation de chaque variable indépendante, ce qui fournira autant d'équations qu'il y a de variables indépendantes.

966. Supposons, par exemple, que le polygone EF soit le polygone CD lui-même et que la question soit celle-ci :

On demande, parmi tous les polygones de périmètre donné passant par deux points fixes C, D *et ayant leurs sommets sur des ordonnées fixes, quel est celui qui donne une aire* ABCD *maximum.*

Si l'on désigne par $x_0, x_1, \ldots, x_n$ les abscisses fixes des sommets, par y_0, y_n les ordonnées constantes des extrémités C, D et par $y_1, \ldots, y_{n-1}$ les ordonnées variables intermédiaires, l'expression de l'aire u, qui devra être maximum, sera

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{x_1 - x_0}{2}(y_0 + y_1) + \frac{x_2 - x_1}{2}(y_2 + y_1) + \ldots \\ &\qquad + \frac{x_n - x_{n-1}}{2}(y_n + y_{n-1}), \\ &= \frac{x_1 - x_0}{2}y_0 + \frac{x_2 - x_0}{2}y_1 + \frac{x_3 - x_1}{2}y_2 + \ldots \\ &\qquad + \frac{x_n - x_{n-2}}{2}y_{n-1} + \frac{x_n - x_{n-1}}{2}y_n. \end{aligned}\right.$$

L'équation de condition qui exprime que le périmètre du polygone est de longueur donnée l est

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \ldots \\ &\qquad + \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2} = l. \end{aligned}\right.$$

D'après la règle établie [409] pour trouver le maximum ou le minimum d'une fonction f lorsque les variables indépendantes sont assujetties à la condition $\varphi = 0$, on cherchera le maximum absolu de $f + \lambda\varphi$, λ étant une constante que l'on détermine par la condition que les valeurs trouvées pour les variables satisfassent à l'équation $\varphi = 0$. Nous avons donc ici à chercher le maximum absolu de

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x_1 - x_0}{2}y_0 + \frac{x_2 - x_0}{2}y_1 + \ldots + \frac{x_n - x_{n-2}}{2}y_{n-1} + \frac{x_n - x_{n-1}}{2}y_n \\ &\qquad + \lambda(r_1 + r_2 + \ldots + r_n), \end{aligned}\right.$$

en posant, pour abréger,

$$r_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}.$$

Or la variation de la quantité (3) est, en remarquant que x_0, $x_1, \ldots, x_n, y_0, y_n$, λ sont des constantes,

$$\frac{x_2 - x_0}{2}\,\delta y_1 + \frac{x_3 - x_1}{2}\,\delta y_2 + \ldots + \frac{x_n - x_{n-2}}{2}\,\delta y_{n-1}$$

$$+ \lambda\left[\frac{y_1 - y_0}{r_1}\,\delta y_1 + \frac{y_2 - y_1}{r_2}(\delta y_2 - \delta y_1) + \ldots + \frac{y_n - y_{n-1}}{r_n}(-\delta y_{n-1})\right].$$

Il faut maintenant ordonner cette expression par rapport à δy_1, $\delta y_2, \ldots, \delta y_n$, et, pour cela, écrire les termes de la seconde ligne sous la forme

$$\lambda\left[\left(\frac{y_1 - y_0}{r_1} - \frac{y_2 - y_1}{r_2}\right)\delta y_1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{r_2} - \frac{y_3 - y_2}{r_3}\right)\delta y_2 + \ldots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{r_{n-1}} - \frac{y_n - y_{n-1}}{r_n}\right)\delta y_{n-1}\right],$$

où l'on a introduit, au lieu des différences des variations de deux ordonnées consécutives, ces variations elles-mêmes multipliées par les différences de leurs coefficients, transformation qui, dans le cas où les différences sont infiniment petites, correspond à l'intégration par parties [970].

En égalant maintenant à zéro le coefficient de chaque variation, on a les $n - 1$ équations

$$(4)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{x_2 - x_0}{2} + \lambda\left(\dfrac{y_1 - y_0}{r_1} - \dfrac{y_2 - y_1}{r_2}\right), \\ 0 = \dfrac{x_3 - x_1}{2} + \lambda\left(\dfrac{y_2 - y_1}{r_2} - \dfrac{y_3 - y_2}{r_3}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ 0 = \dfrac{x_n - x_{n-2}}{2} + \lambda\left(\dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{r_{n-1}} - \dfrac{y_n - y_{n-1}}{r_n}\right), \end{cases}$$

qui détermineront $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ en fonction de λ. En substituant ces valeurs dans l'équation (2), on en tirera la valeur de λ, et, par suite, on connaîtra $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$.

967. Supposons maintenant tous les intervalles $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}$ infiniment petits et égaux à dx. En écrivant alors ds_{k-1} au lieu de r_k, les équations (4) se changeront dans

les suivantes :

$$dx_0 - \lambda d\frac{dy_0}{ds_0} = 0, \quad dx_1 - \lambda d\frac{dy_1}{ds_1} = 0, \quad \ldots, \quad dx_{n-2} - \lambda d\frac{dy_{n-2}}{ds_{n-2}} = 0.$$

Cette suite d'équations, toutes de forme identique, exprime que, pour tous les points de la courbe limite du polygone, on a la relation

$$dx - \lambda d\frac{dy}{ds} = 0,$$

qui n'est autre chose que l'équation différentielle de cette courbe. L'intégrale de cette équation, qui est du second ordre, renfermera deux constantes arbitraires, que l'on déterminera par la double condition que la courbe passe par les deux points donnés. On cherchera ensuite la longueur de l'arc de courbe en fonction de λ et on l'égalera à l, ce qui achèvera de déterminer la courbe, laquelle est un cercle [972]. Ainsi le cercle est, parmi toutes les courbes isopérimètres menées entre deux points donnés, celle qui comprend une aire maximum.

968. On voit par cet exemple que, si l'on passe du polygone infinitésimal à la courbe qui en est la limite, le nombre des variables indépendantes devient infini. Les équations *de même forme*, obtenues en égalant à zéro le coefficient de la première puissance de chaque variation, se changeront en une relation devant avoir lieu pour une infinité de points, c'est-à-dire à une équation entre deux variables continues et leurs différentielles. Pour obtenir cette relation, il faut calculer l'expression de δu en fonction de l'abscisse, de y et de ses dérivées, et des variations de y et de ses dérivées, ces dernières variations étant encore des fonctions des mêmes variables; puis on écrira que la quantité δu, *réduite à sa partie principale*, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, s'évanouit pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites, en tenant compte de la partie de δu qui peut provenir de la variation des limites elles-mêmes, lesquelles, dans le polygone, auraient pu faire aussi partie des variables indépendantes.

Pour montrer comment la considération du polygone peut conduire à une expression telle que $\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \ldots)\, dx$, remar-

quons que la somme (3), qui doit être un maximum, devient, pour des divisions infiniment petites de l'intervalle $x_n - x_0$ et dans l'hypothèse où y devient une fonction continue de x,

$$\frac{1}{2}y_0\,dx_0 + y_1\,dx_1 + \ldots + y_{n-1}\,dx_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\,dx_{n-1}$$
$$+ \lambda\left(\sqrt{dx_0^2 + dy_0^2} + \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2} + \ldots\right),$$

ou, en négligeant $\frac{1}{2}y_0\,dx_0$ et $\frac{1}{2}y_n\,dx_{n-1}$,

$$\int_{x_0}^{x_n}\left(y\,dx + \lambda\sqrt{dx^2 + dy^2}\right).$$

Il s'agit maintenant de calculer la variation d'une telle intégrale définie.

969. Nous avons déjà déterminé la partie de δu en dehors du signe $\int$,

$$V_1\,\delta x_1 - V_0\,\delta x_0 = [V\,\delta x]_0^1.$$

Pour calculer l'autre partie $\int_{x_0}^{x_1}\delta V\,dx$, désignons, pour abréger, par P, Q, R, ... les dérivées partielles de V par rapport à $y, y', y'', \ldots$,

$$P = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Q = \frac{\partial V}{\partial y'}, \quad R = \frac{\partial V}{\partial y''}, \quad \cdots;$$

on aura ainsi

$$\delta V = P\,\delta y + Q\,\delta y' + R\,\delta y'' + \ldots.$$

Or, si $y_1 = y + \delta y$ est l'ordonnée de la courbe C'M'D', infiniment voisine de CMD, on aura

$$\delta y = y_1 - y, \quad D_x\,\delta y = y'_1 - y' = \delta y', \quad D_x^2\,\delta y = y''_1 - y'' = \delta y'', \ \ldots,$$

et, en général,

$$D_x^n\,\delta y = y_1^{(n)} - y^{(n)} = \delta y^{(n)},$$

ce que l'on peut écrire sous la forme

$$d^n(\delta y) = \delta(d^n y),$$

dx étant une constante par rapport à la caractéristique δ. Ainsi les

opérations indiquées par les caractéristiques d et δ sont commutatives entre elles.

970. Cela posé, on a

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta V\, dx = \int_{x_0}^{x_1} (P\,\delta y + Q\,\delta y' + R\,\delta y'' + \ldots)\, dx.$$

Les quantités $\delta y'$, $\delta y''$, ... qui entrent dans cette expression sont des fonctions des variations indépendantes, c'est-à-dire des δy. Ainsi, en appelant $y, y_1, y_2, \ldots$ les ordonnées correspondantes aux abscisses x, $x + dx$, $x + 2\,dx$, ..., lesquelles ordonnées sont les variables indépendantes du problème, $\delta y'$, $\delta y''$, ... seront les limites des rapports

$$\frac{\delta y_1 - \delta y}{dx}, \quad \frac{\delta y_2 - 2\,\delta y_1 + \delta y}{dx^2}, \quad \ldots.$$

Nous allons faire disparaître de dessous le signe $\int$ ces variations non indépendantes $\delta y'$, $\delta y''$, ..., pour n'y laisser que les variations indépendantes δy, et pour cela nous emploierons l'intégration par parties.

On a, en effet,

$$\int_{x_0}^{x_1} Q\,\delta y'\, dx = \int_{x_0}^{x_1} Q\, d\delta y = \left[Q\,\delta y\right]_0^1 - \int_{x_0}^{x_1} \frac{dQ}{dx}\,\delta y\, dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} R\,\delta y''\, dx = \int_{x_0}^{x_1} R\, d\delta y' = \left[R\,\delta y'\right]_0^1 - \int_{x_0}^{x_1} \frac{dR}{dx}\,\delta y'\, dx$$

$$= \left[R\,\delta y' - \frac{dR}{dx}\,\delta y\right]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2 R}{dx^2}\,\delta y\, dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} S\,\delta y'''\, dx = \left[S\,\delta y'' - \frac{dS}{dx}\,\delta y' + \frac{d^2 S}{dx^2}\,\delta y\right]_0^1 - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^3 S}{dx^3}\,\delta y\, dx,$$

et ainsi de suite. Si donc on pose

$$H = \left[\begin{array}{l} V\delta x + \left(Q - \dfrac{dR}{dx} + \dfrac{d^2 S}{dx^2} - \ldots\right)\delta y \\ \qquad + \left(R - \dfrac{dS}{dx} + \ldots\right)\delta y' + (S - \ldots)\,\delta y'' + \ldots \end{array}\right]_0^1,$$

$$\Theta = P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2 R}{dx^2} - \frac{d^3 S}{dx^3} + \ldots,$$

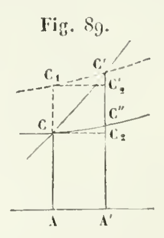
on aura

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = H + \int_{x_0}^{x_1} \Theta\, \delta y\, dx.$$

Telles sont les formules que nous emploierons lorsque les limites x_0 et x_1 seront fixes, et alors le terme $[V \delta x]_0^1$ disparaîtra de lui-même.

971. Mais lorsque les limites x_0, x_1 de l'intégrale sont supposées variables, il faut faire subir une transformation à la valeur de H. La quantité que nous avons désignée par δy et les quantités $\delta y'$, $\delta y''$, ..., qui en sont les dérivées, sont obtenues en passant d'un point M de la courbe CD au point M′ de la courbe C′D′, situé sur la même ordonnée. Or, si l'on veut calculer les variations des coordonnées des extrémités C et D de la courbe (*fig.* 89) et celles des dérivées de ces coordonnées d'après les conditions auxquelles

Fig. 89.



ces extrémités sont assujetties, il faudra faire varier à la fois les x et les y de ces extrémités. Par exemple, si l'extrémité C est assujettie à rester sur une courbe donnée CC′, son ordonnée y_0 ne pourra pas varier sans l'abscisse x_0, de sorte que, en différentiant l'équation de la courbe CC′ par rapport à x_0, on devra faire subir à x_0, y_0, y'_0, ... des variations que nous désignerons, pour un instant, par Δx_0, Δy_0, $\Delta y'_0$, ...

Le Δy_0 ainsi défini peut s'obtenir en faisant varier d'abord l'ordonnée y_0 de la quantité $CC_1 = \delta y_0$, relative à la même abscisse, puis en y ajoutant la différence entre les ordonnées AC_1 et $A'C'$, ou, ce qui revient au même (aux quantités du second ordre près), la différence entre les ordonnées AC et A′C″, prises sur la même courbe et correspondantes à des abscisses qui diffèrent entre elles de Δx_0. Cette différence a ainsi pour valeur

$y'_0 \Delta x_0$, de sorte qu'on a

$$\Delta y_0 = \mathrm{A'C'} - \mathrm{AC} = \delta y_0 + y_0 \Delta x_0.$$

On devra donc remplacer le δy_0 qui entre dans l'expression de H et qui, étant ce que devient pour $x = x_0$ le δy qui est sous le signe $\int$, correspond par suite à une abscisse x_0 invariable, on devra, dis-je, le remplacer par son expression au moyen des variations simultanées de l'ordonnée et de l'abscisse,

$$\delta y_0 = \Delta y_0 - y'_0 \Delta x_0,$$

y'_0 étant ce que devient le y' de la courbe CD pour $x = x_0$, et Δx_0, Δy_0 ayant entre eux un rapport déterminé par la condition initiale à laquelle est assujetti le point C, par exemple, par l'équation de la courbe CC'.

Le raisonnement que nous venons de faire pour la variation de la valeur initiale de la fonction y s'applique de la même manière aux variations des valeurs initiales des dérivées y', y'', ..., de sorte que l'on aura

$$\delta y'_0 = \Delta y'_0 - y''_0 \Delta x_0, \quad \delta y''_0 = \Delta y''_0 - y'''_0 \Delta x_0, \quad \ldots.$$

On aurait des formules toutes semblables pour les variations δy_1, $\delta y'_1$, $\delta y''_1$, ... correspondantes à l'autre limite x_1 de l'intégrale.

Donc, pour avoir la valeur de H exprimée au moyen des variations des quantités aux limites, telles qu'elles sont données par les équations de condition relatives à ces limites, il faut, dans l'expression de H, remplacer

$$\delta y, \quad \delta y', \quad \delta y'', \quad \ldots$$

respectivement par

$$\Delta y - y'\Delta x, \quad \Delta y' - y''\Delta x, \quad \Delta y'' - y'''\Delta x, \quad \ldots,$$

de sorte que, en remettant de nouveau δ au lieu de Δ, et ayant soin de se rappeler la différence de signification entre les δ sous le signe $\int$ et les δ hors du signe $\int$, on aura pour H cette nouvelle expression, que l'on devra employer dans le cas des limites variables,

$$\mathrm{H} = \left[\begin{array}{l} \left[\mathrm{V} - y'\left(\mathrm{Q} - \dfrac{d\mathrm{R}}{dx} + \dfrac{d^2\mathrm{S}}{dx^2} - \ldots\right) - y''\left(\mathrm{R} - \dfrac{d\mathrm{S}}{dx} + \ldots\right) - y'''(\mathrm{S} - \ldots) \right] \delta x \\ + \left(\mathrm{Q} - \dfrac{d\mathrm{R}}{dx} + \dfrac{d^2\mathrm{S}}{dx^2} - \ldots\right)\delta y + \left(\mathrm{R} - \dfrac{d\mathrm{S}}{dx} + \ldots\right)\delta y' + (\mathrm{S} - \ldots)\delta y'' + \ldots \end{array} \right]_0^1,$$

les quantités $y', y'', \ldots$ et tout ce qui en dépend étant donnés par l'équation de la courbe CD, et les variations δ étant les accroissements subis par ces quantités, lorsque les extrémités C et D se déplacent conformément aux conditions auxquelles elles sont assujetties. Ainsi, si les quantités relatives à la limite x_0 sont assujetties à la condition

$$F(x_0, y_0, y'_0, y''_0, \ldots) = 0,$$

on devra prendre pour $\delta x_0, \delta y_0, \delta y'_0, \delta y''_0, \ldots$ des accroissements satisfaisant à la relation

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial F}{\partial y_0}\delta y_0 + \frac{\partial F}{\partial y'_0}\delta y'_0 + \ldots = 0.$$

Quant aux dérivées de y_0, d'ordres supérieurs à celles qui entrent dans F, elles ne seront assujetties à aucune condition, et leurs variations devront être considérées comme indépendantes.

972. Si, outre la fonction inconnue y et ses dérivées, l'expression V renfermait une autre fonction inconnue z avec ses dérivées, alors, pour avoir $\delta\int_{x_0}^{x_1} V dx$, il faudrait, en désignant par $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$ les dérivées partielles de V par rapport à $z, z', \ldots$, ajouter à la valeur de H les termes

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[-z'\left(\mathfrak{q} - \dfrac{d\mathfrak{r}}{dx} + \ldots\right) - z''(\mathfrak{r} - \ldots) - \ldots \right]\delta x \\ \quad + \left(\mathfrak{q} - \dfrac{d\mathfrak{r}}{dx} + \ldots\right)\delta z + (\mathfrak{r} - \ldots)\delta z' + \ldots \end{array} \right\}_0^1,$$

et augmenter le terme $\Theta\delta y$ sous le signe $\int$ de la quantité analogue

$$\vartheta\,\delta z = \left(\mathfrak{p} - \frac{d\mathfrak{q}}{dx} + \frac{d^2\mathfrak{r}}{dx^2} - \ldots\right)\delta z.$$

On agirait de même s'il y avait un plus grand nombre de fonctions inconnues.

§ II.

FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES POUR LA DÉTERMINATION DES FONCTIONS INCONNUES

973. Considérons d'abord le cas d'une seule fonction inconnue. La variation de l'intégrale définie

(1) $$u = \int_{x_0}^{x_1} V dx$$

a pour partie infiniment petite du premier ordre

(2) $$\delta u = H + \int_{x_0}^{x_1} \Theta \delta y \, dx.$$

Pour que u soit maximum ou minimum, il faut que la variation complète et rigoureuse de u à partir de la valeur cherchée de y en fonction de x ait un signe constant, quels que soient les signes des variations indépendantes desquelles dépend la variation de u. Or le signe de la variation de u dépend de celui de sa partie principale δu, tant que celle-ci n'est pas nulle. Mais δu se compose de deux parties, dont la première H change de signe lorsqu'on change en même temps les signes de toutes les variations qui sont indépendantes parmi les variations δx_0, δy_0, $\delta y'_0, \ldots$, $\delta x_1, \ldots$. La partie $\int \Theta \delta y \, dx$ change de signe lorsqu'on change, pour toute valeur de x, le signe de la fonction arbitraire δy. Donc δu peut changer de signe, s'il n'est pas nul. Donc, pour que la variation complète de u ne change pas de signe, il faut que δu soit nul, quelles que soient les variations des variables indépendantes.

Or δu se compose de deux parties, qui dépendent de deux systèmes de variations indépendants entre eux, et dont chacun pourrait tour à tour prendre une valeur numérique prépondérante et donner son signe à l'ensemble s'ils n'étaient pas nuls séparément. Il faut donc que, séparément, on ait

$$H = 0, \quad \int_{x_0}^{x_1} \Theta \delta y \, dx = 0,$$

et, comme l'intégrale ne saurait être nulle, quel que fût δy, si l'on

n'avait pas $\Theta = 0$, on trouvera donc enfin qu'il faut satisfaire aux deux conditions

$$H = 0, \quad \Theta = 0.$$

On verra de même, dans le cas de deux fonctions inconnues y et z [972], que l'on doit avoir en général

$$H = 0, \quad \Theta = 0, \quad \vartheta = 0,$$

et ainsi de suite.

974. *Ordre de l'équation différentielle.* — Dans le cas d'une seule fonction inconnue, soit $y^{(n)}$ la plus haute dérivée contenue dans V, et $\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} = T$. L'équation $\Theta = 0$ contiendra [970] la quantité $\frac{d^n T}{dx^n}$, et, si T renferme $y^{(n)}$, Θ contiendra, par suite, $y^{(2n)}$. Donc l'équation $\Theta = 0$ sera généralement de l'ordre $2n$. Elle serait d'un ordre inférieur si T ne contenait pas $y^{(n)}$, c'est-à-dire si $y^{(n)}$ n'entrait que linéairement dans V.

Dans le cas de deux fonctions inconnues y, z, si les plus hautes dérivées contenues dans V sont $y^{(n)}$ et $z^{(m)}$, on aura deux équations simultanées dont les ordres seront, pour l'une, $2n$ par rapport à y, $n + m$ par rapport à z; pour l'autre, $n + m$ par rapport à y, $2m$ par rapport à z. L'ordre du système sera donc, en général, égal à $2n + 2m$.

975. *Abaissement de l'ordre de l'équation différentielle.* — Considérons le cas d'une seule fonction inconnue. L'équation différentielle sera

$$(3) \qquad P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2 R}{dx^2} - \ldots = 0.$$

On peut abaisser son ordre dans les cas suivants :

1° V ne contient pas y, et l'on a $P = 0$. Alors il vient, en intégrant une première fois,

$$-Q + \frac{dR}{dx} - \ldots = C.$$

Si V ne contient ni y ni y', alors $P = Q = 0$, d'où, en intégrant

deux fois,

$$R - \frac{dS}{dx} + \ldots = Cx + C',$$

et ainsi de suite.

2° V ne contient pas x. On pourrait, dans ce cas, prendre y pour variable indépendante, ce qui ramènerait au cas précédent; mais il est plus simple de procéder comme il suit. On a alors

$$dV = P\,dy + Q\,dy' + \ldots.$$

Or, d'après l'équation (3),

$$P = \frac{dQ}{dx} - \frac{d^2R}{dx^2} + \ldots;$$

donc

$$dV = Q\,dy' + \frac{dQ}{dx}dy + R\,dy'' - \frac{d^2R}{dx^2}dy + S\,dy''' + \frac{d^3S}{dx^3}dy + \ldots.$$

On a, d'ailleurs,

$$\int Q\,dy' = Qy' - \int \frac{dQ}{dx}y'\,dx = Qy' - \int \frac{dQ}{dx}dy,$$

$$\int R\,dy'' = Ry'' - \int \frac{dR}{dx}dy' = Ry'' - \frac{dR}{dx}y' + \int \frac{d^2R}{dx^2}dy,$$

$$\int S\,dy''' = Sy''' - \int \frac{dS}{dx}dy'' = Sy''' - \frac{dS}{dx}y'' + \int \frac{d^2S}{dx^2}dy'$$

$$= Sy''' - \frac{dS}{dx}y'' + \frac{d^2S}{dx^2}y' - \int \frac{d^3S}{dx^3}dy,$$

et ainsi de suite. Donc

$$(4)\left\{\begin{aligned} V &= C + Qy' + Ry'' - \frac{dR}{dx}y' + Sy''' - \frac{dS}{dx}y'' + \frac{d^2S}{dx^2}y' + \ldots \\ &= C + \left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} - \ldots\right)y' + \left(R - \frac{dS}{dx} + \ldots\right)y'' + (S - \ldots)y''' + \ldots, \end{aligned}\right.$$

équation de l'ordre $2n-1$ seulement, dont le second membre a une forme analogue à celle de H.

3° V ne contient ni x ni y. Alors $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, $P = 0$, et l'on a

$$dV = Q\,dy' + R\,dy'' + \ldots, \quad 0 = -\frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \ldots.$$

Cette dernière équation donne

$$Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2 S}{dx^2} - \ldots = C',$$

et, en substituant cette valeur dans l'équation (4), celle-ci devient

$$(5) \qquad V = C + C'y' + \left(R - \frac{dS}{dx} + \ldots\right)y'' + (S - \ldots)y''' + \ldots,$$

équation d'un ordre moins élevé d'une unité que (4).

De même, si V ne contient aucune des quantités x, y, y', alors $\frac{\partial V}{\partial x} = P = Q = o$, et l'on a

$$R - \frac{dS}{dx} + \ldots = C'x + C''.$$

Mettant ces valeurs dans l'équation (4), elle devient

$$V = C - C'y' + (C'x + C'')y'' + (S - \ldots)y''' + \ldots,$$

équation de l'ordre $2n - 3$. Et ainsi de suite.

On voit donc que, si dans un problème de Géométrie plane on arrive à une équation différentielle du second ordre, et que V ne contienne ni x ni y, on pourra abaisser immédiatement l'ordre de l'équation de deux unités, ce qui revient à trouver deux intégrales premières, entre lesquelles il ne restera plus qu'à éliminer y'. Si donc V ne contient que y', on arrivera immédiatement à une équation finie.

On opérera d'une manière analogue dans le cas de deux fonctions inconnues.

976. *Détermination des constantes arbitraires.* — Dans le cas d'une seule fonction inconnue, l'intégration de l'équation $\Theta = o$ amène, en général, $2n$ constantes arbitraires. Pour les déterminer, on se servira de l'équation $H = o$, et nous allons voir comment, dans chaque cas particulier, cette équation fournira autant de relations qu'il en faut joindre aux conditions aux limites pour déterminer ces $2n$ constantes.

1° Les quantités aux limites ne sont assujetties à aucune condi-

tion. Pour chaque limite, on aura une relation de la forme

$$A\delta x + B\delta y + C\delta y' + \ldots = 0,$$

où entrent δx, δy, $\delta y'$, ..., $\delta y^{(n-1)}$. En égalant à zéro les $n+1$ coefficients A, B, ..., relatifs à chaque limite, on obtiendra $2n+2$ équations, qui, jointes à l'équation intégrale de $\Theta = 0$ prise aux deux limites, donneront en tout $2n+4$ relations pour déterminer les $2n$ constantes arbitraires et les quatre quantités x_0, y_0, x_1, y_1.

S'il y a deux fonctions inconnues, l'équation $H = 0$ fournira $2(n+m+1)$ relations; les intégrales des équations $\Theta = 0$, $\vartheta = 0$ en fourniront quatre, ce qui fait en tout $2(n+m)+6$ relations pour déterminer les $2(n+m)$ constantes arbitraires et les six quantités $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$. Et ainsi de suite.

2° La courbe obtenue aboutit à des points fixes. Alors δx_0, δy_0, δx_1, δy_1 étant nuls, on a quatre équations de moins, qui seront remplacées par la connaissance des quatre quantités x_0, y_0, x_1, y_1.

De même dans le cas de deux fonctions inconnues.

3° La courbe est assujettie à certaines conditions aux extrémités. Par exemple, on donne la direction de la tangente au point (x_0, y_0). Alors, $\delta y'_0$ étant nul, on a une condition de moins; mais elle est remplacée par la connaissance de la valeur de $\frac{dy}{dx}$ pour $x = x_0$.

Si l'on demande que les tangentes aux deux extrémités fassent entre elles un angle donné, un angle droit par exemple, on aura

$$y'_0 y'_1 = -1, \quad \text{d'où} \quad \delta y'_1 = -\frac{\delta y'_0}{y'^2_0}.$$

On aura un coefficient de δ de moins à égaler à zéro; mais l'équation qui en serait résultée est remplacée par l'équation $y'_0 y'_1 = -1$, où y'_0 et y'_1 sont tirés de l'équation intégrale, dans laquelle on fait, après la différentiation, $x = x_0$, puis $x = x_1$.

4° Si le point (x_0, y_0) doit se trouver sur une courbe donnée

$$F(x_0, y_0) = 0,$$

on aura alors

$$F'(x_0)\,\delta x_0 + F'(y_0)\,\delta y_0 = 0,$$

d'où l'on tire δy_0 en fonction de δx_0. On a alors une équation de moins, qui est remplacée par celle de la courbe.

5° Dans le cas de deux fonctions inconnues, supposons la courbe cherchée assujettie à rester sur une surface donnée

$$F(x, y, z) = 0.$$

Alors, on aura à la fois

$$\Theta \delta y + \vartheta \delta z = 0, \quad F'(y) \delta y + F'(z) \delta z = 0,$$

d'où l'on tire l'équation unique

$$\frac{\Theta}{F'(y)} = \frac{\vartheta}{F'(z)},$$

dont l'ordre sera le plus grand des deux nombres $2n$, $2m$, et que l'on ramènera, au moyen de l'équation $F = 0$, à être une équation entre deux variables x et y ou x et z.

On agira de même pour les autres cas qui pourront se présenter.

977. *Maxima et minima relatifs, ou problème des isopérimètres.* — Ces sortes de questions tirent leur nom de la première d'entre elles qui ait été résolue, et que nous avons déjà indiquée dans les nos 966 et 967.

On sait [408] que, pour obtenir le maximum ou le minimum d'une fonction $u = f(x, y, z, \ldots)$ de plusieurs variables, lorsque celles-ci sont assujetties aux conditions exprimées par les équations

$$\varphi = 0, \quad \chi = 0, \quad \ldots,$$

on devra chercher le maximum ou le minimum *absolu* de la fonction

$$u + \lambda\varphi + \mu\chi + \ldots,$$

où l'on considérera toutes les variables $x, y, z, \ldots$ comme indépendantes, $\lambda, \mu, \ldots$ étant des facteurs constants indéterminés. Les valeurs que l'on obtiendra pour $x, y, z, \ldots$ seront des fonctions de $\lambda, \mu, \ldots$. En substituant ces valeurs dans les équations de condition $\varphi = 0, \chi = 0, \ldots$, celles-ci donneront les valeurs de $\lambda, \mu, \ldots$.

Cette règle, étant applicable quel que soit le nombre des variables indépendantes, le sera encore à la limite, quand ce nombre

sera infini, comme cela a lieu dans les questions qui dépendent du Calcul des variations.

Soit proposé, en effet, de trouver la valeur de y qui rend maximum ou minimum l'intégrale

$$u = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{U}\, dx,$$

cette fonction y étant assujettie à la condition qu'une autre intégrale définie

$$v = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{V}\, dx$$

(V étant, ainsi que U, une fonction donnée de $x, y, y', y'', \ldots$) prenne une valeur déterminée a. Soit λ une constante indéterminée, et cherchons le maximum ou le minimum absolu de l'expression

$$u + \lambda(v - a),$$

ou, ce qui revient au même, λa étant constant, celui de

$$w = u + \lambda v.$$

La fonction y que l'on trouvera rendra la quantité w maximum ou minimum parmi toutes les valeurs qui correspondent à une valeur donnée de λ, quelle qu'elle soit. Si maintenant, à l'aide de la valeur trouvée pour y, on calcule l'intégrale v, cette intégrale sera une fonction de λ. En déterminant λ de manière que v prenne la valeur a, y sera alors la fonction qui rend maximum ou minimum la quantité $u + \lambda(v - a)$ parmi toutes celles qui répondent à la valeur de λ qui rend $v = a$. Ce sera donc la fonction cherchée.

On opérerait de même si, au lieu d'une seule condition $v = a$, on en avait plusieurs :

$$v = a, \quad v_1 = a_1, \quad \ldots.$$

978. On peut encore démontrer cette règle comme il suit.

L'intégrale u devant être maximum ou minimum et l'intégrale v constante, les variations de ces deux intégrales seront nulles, de sorte que l'on aura à la fois

$$\delta u = 0, \quad \delta v = 0.$$

En transformant maintenant ces deux variations au moyen de l'intégration par parties [970], on aura les deux conditions

$$G + \int_{x_0}^{x_1} \Theta\, \delta y\, dx = 0, \quad H + \int_{x_0}^{x_1} \Lambda\, \delta y\, dx = 0.$$

Si l'on pose maintenant

(1) $$\int_{x_0}^{x} \Lambda\, \delta y\, dx = \psi(x),$$

la fonction $\psi(x)$ sera telle, que l'on aura à la fois

(2) $$\psi(x_0) = 0,$$

puisque x_0 est la limite inférieure de l'intégrale (1), et

(3) $$H + \psi(x_1) = 0,$$

à cause de $\delta v = 0$.

L'équation (1) donne, en différentiant,

$$\Lambda\, \delta y = \psi'(x), \quad \text{d'où} \quad \delta y = \frac{\psi'(x)}{\Lambda},$$

et, par suite, l'équation $\delta u = 0$ devient

$$G + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\Theta}{\Lambda} \psi'(x)\, dx = 0,$$

ou, en intégrant par parties, et ayant égard aux équations (2) et (3),

$$G - \left[\frac{\Theta}{\Lambda}\right]_1 H - \int_{x_0}^{x_1} \psi(x)\, d\frac{\Theta}{\Lambda} = 0.$$

Dans cette équation, $\psi(x)$ est tout à fait arbitraire entre les limites, comme δy l'était dans les questions de maximum ou de minimum absolu. Nous en conclurons donc, de la même manière,

$$G - \left[\frac{\Theta}{\Lambda}\right]_1 H = 0, \quad d\frac{\Theta}{\Lambda} = 0.$$

La seconde de ces équations donne

$$\frac{\Theta}{\Lambda} = -\lambda,$$

λ étant une constante arbitraire, et, par suite, on a aussi

$$\left[\frac{\Theta}{\Lambda}\right]_1 = -\lambda.$$

Les équations précédentes pourront donc se mettre sous la forme

$$G + \lambda H = 0, \quad \Theta + \lambda \Lambda = 0,$$

c'est-à-dire que l'on obtient les mêmes équations que si l'on cherchait le maximum ou le minimum absolu de l'intégrale

$$u + \lambda v = \int_{x_0}^{x_1} (U + \lambda V)\, dx.$$

§ III.

EXEMPLES D'APPLICATION DU CALCUL DES VARIATIONS.

979. I. *Trouver la ligne de longueur minimum entre deux de ses points.*

L'intégrale qu'il s'agit de rendre minimum est

$$u = \int_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}.$$

La quantité sous le signe $\int$ ne contenant ni x, ni y, ni z, les équations

(1) $$P - \frac{dQ}{dx} = 0, \quad \mathfrak{p} - \frac{d\mathfrak{q}}{dx} = 0$$

donnent

$$Q = C, \quad \mathfrak{q} = C',$$

ou, à cause des valeurs $Q = \dfrac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}$, $\mathfrak{q} = \dfrac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}$,

$$y' = C_1, \quad z' = C_2,$$

d'où

(2) $$y = C_1 x + C'_1, \quad z = C_2 x + C'_2,$$

équations d'une ligne droite.

L'équation $H = 0$ devient

$$[(V - Qy' - qz')\delta x + Q\delta y + q\delta z]_0^1 = 0.$$

On aurait pu arriver directement aux équations (1), en calculant immédiatement la variation

$$\delta u = \left[\delta x\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\right]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} \frac{y'\delta y' + z'\delta z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\,dx.$$

Or

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{y'\delta y'\,dx}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = \left[\frac{y'\delta y}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right]_0^1 - \int_{x_0}^{x_1} \delta y\, d\frac{y'\delta y}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}},$$

et de même pour l'autre terme. Donc on aura

$$d\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0, \quad d\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0;$$

puis, en remplaçant, dans la partie intégrée, δy, δz par $\delta y - y'\delta x$, $\delta z - z'\delta x$ [971],

$$\left[\delta x\sqrt{1 + y'^2 + z^2} + \frac{y'(\delta y - y'\delta x) + z'(\delta z - z'\delta x)}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right] = 0,$$

ou, en réduisant,

$$(3) \qquad [\delta x + y'\delta y + z'\delta z]_0^1 = 0.$$

980. Si les extrémités sont fixes, leur connaissance détermine les quatre constantes C_1, C'_1, C_2, C'_2.

Si l'une des extrémités est assujettie à rester sur la courbe représentée par les équations

$$(4) \qquad \varphi(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \chi(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

alors on a

$$(5) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\delta y_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial z_0}\delta z_0 = 0, \quad \frac{\partial\chi}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial\chi}{\partial y_0}\delta y_0 + \frac{\partial\chi}{\partial z_0}\delta z_0 = 0.$$

L'équation (3) se réduit à

$$(6) \quad \delta x_0 + y'_0\delta y_0 + z'_0\delta z_0 = 0, \quad \text{ou} \quad dx_0\delta x_0 + dy_0\delta y_0 + dz_0\delta z_0 = 0,$$

équation qui exprime que la droite (2) est normale à la courbe (4). En y joignant les équations (2) et leurs différentielles pour $x = x_0$,

$$dy_0 = C_1 dx_0, \quad dz_0 = C_2 dx_0,$$

on aura le nombre d'équations nécessaire pour déterminer les quatre constantes C_1, C'_1, C_2, C'_2. En effet, les dernières équations donnent, avec l'équation (6),

$$\delta x_0 + C_1 \delta y_0 + C_2 \delta z_0 = 0,$$

équation qui, jointe aux équations (5), conduit à la suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & C_1 & C_2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} & \frac{\partial \varphi}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \chi}{\partial x_0} & \frac{\partial \chi}{\partial y_0} & \frac{\partial \chi}{\partial z_0} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation, jointe aux équations (4) et aux équations

$$y_0 = C_1 x_0 + C'_1, \quad z_0 = C_2 x_0 + C'_2,$$
$$y_1 = C_1 x_1 + C'_1, \quad z_1 = C_2 x_1 + C'_2,$$

où x_1, y_1, z_1 sont donnés, formera un système de sept équations, d'où l'on tirera les sept constantes inconnues $x_0, y_0, z_0, C_1, C'_1, C_2, C'_2$.

On traiterait de la même manière le cas où l'extrémité (x_1, y_1, z_1) serait assujettie à rester sur une autre courbe donnée.

On procéderait semblablement si l'une des extrémités ou toutes les deux étaient assujetties à rester sur une ou deux surfaces données.

981. *Trouver la ligne la plus courte sur une surface donnée (ligne géodésique).* — Soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de cette surface. On en tire

$$\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0,$$

avec l'équation

$$\delta y . d \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} + \delta z \cdot \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0,$$

ou

$$\delta y d \frac{dy}{ds} + \delta z d \frac{dz}{ds} = 0.$$

Par conséquent, à cause des équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0,$$

$$\frac{dx}{ds} d \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d \frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} d \frac{dz}{ds} = \frac{1}{2} d \left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \right] = 0,$$

on en conclura

$$\frac{d \frac{dy}{ds}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{d \frac{dz}{ds}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\frac{dy}{ds} d \frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} d \frac{dz}{ds}}{\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}} = \frac{d \frac{dx}{ds}}{\frac{\partial f}{\partial x}},$$

équations qui expriment que le plan osculateur de la ligne cherchée est, en chaque point de cette ligne, normal à la surface donnée [697].

Soit, par exemple, la surface

$$y^2 + z^2 = a^2.$$

A cause de $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, on aura ici

$$d \frac{dx}{ds} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{ds} = C;$$

la tangente à la courbe fait un angle constant avec l'axe des x. Ensuite on trouve

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \left(1 + \frac{y^2}{z^2}\right) = dx^2 + \frac{a^2}{a^2 - y^2} dy^2 = \frac{dx^2}{C^2},$$

$$\frac{a^2 dy^2}{a^2 - y^2} = \frac{1 - C^2}{C^2} dx^2 = C'^2 dx^2,$$

d'où

$$y = a \sin\left(\frac{x}{C'} + C''\right), \quad z = a \cos\left(\frac{x}{C'} + C''\right),$$

équations d'une hélice [722].

Si les extrémités sont données, on déterminera les constantes de manière que la courbe passe par ces extrémités.

982. Cherchons l'équation de la ligne géodésique dans un système de coordonnées curvilignes quelconques u, v. Il faut déterminer [714] le minimum de l'intégrale

$$s = \int \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2},$$

prise entre deux limites constantes. On a, par les règles du calcul des variations, en prenant v pour variable indépendante et faisant $\delta v = 0$,

$$\begin{aligned}\delta s &= \int \frac{1}{2\,ds}\left[\left(\frac{\partial E}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}du\,dv + \frac{\partial G}{\partial u}dv^2\right)\delta u + 2(E\,du + F\,dv)\,d\delta u\right]\\ &= \left[\frac{E\,du + F\,dv}{ds}\delta u\right]_0^1 + \int \frac{\delta u}{2\,ds}\left(\frac{\partial E}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}du\,dv + \frac{\partial G}{\partial u}dv^2\right)\\ &\quad - \int \delta u\,.\,d\,\frac{E\,du + F\,dv}{ds}.\end{aligned}$$

En ayant égard à la valeur de $\cos\theta$ trouvée au n° 719, et égalant à zéro le multiplicateur de δu sous le signe d'intégration, il vient

$$\frac{\partial E}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}du\,dv + \frac{\partial G}{\partial u}dv^2 = 2\,ds\,.\,d\left(\sqrt{E}\,.\cos\theta\right),$$

ou, à cause de $\sqrt{E}.\sin\theta.ds = dv\sqrt{EG - F^2}$,

$$\begin{aligned}&= \frac{E\,du + F\,dv}{E}\,dE - 2\sqrt{EG - F^2}.\,dv\,d\theta\\ &= \frac{E\,du + F\,dv}{E}\left(\frac{\partial E}{\partial u}du + \frac{\partial E}{\partial v}dv\right) - 2\sqrt{EG - F^2}.\,dv\,d\theta\\ &= \frac{1}{E}\left[E\frac{\partial E}{\partial u}du^2 + \left(E\frac{\partial E}{\partial v} + F\frac{\partial E}{\partial u}\right)du\,dv + F\frac{\partial E}{\partial v}dv^2\right] - 2\sqrt{EG - F^2}.\,dv\,d\theta.\end{aligned}$$

En supprimant de part et d'autre le terme $\frac{\partial E}{\partial u}du^2$ et divisant par dv, on obtient l'équation différentielle des lignes géodésiques

$$(1) \qquad 2\sqrt{EG - F^2}.\,d\theta = \frac{F}{E}dE + \frac{\partial E}{\partial v}du - 2\frac{\partial F}{\partial u}du - \frac{\partial G}{\partial u}dv.$$

On pourrait éliminer $d\theta$ au moyen de la relation

$$\cot\theta = \frac{E}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{du}{dv} + \frac{F}{\sqrt{EG - F^2}},$$

qui se tire des formules du n° 719 ; mais il est plus commode de conserver la forme (1).

L'équation aux lignes géodésiques devient, dans le cas de $F = 0$ [720],

(2) $$2\sqrt{EG}.d\theta = \frac{\partial E}{\partial v}du - \frac{\partial G}{\partial u}dv,$$

et les autres formules se réduisent à

$$ds\cos\theta = \sqrt{E}.du, \quad ds\sin\theta = \sqrt{G}.dv, \quad \cot\theta = \sqrt{\frac{E}{G}}\cdot\frac{du}{dv}.$$

983. La condition $\omega = \frac{\pi}{2}$ étant vérifiée lorsque les lignes $v =$ const. sont les lignes de plus courte distance entre les lignes $u =$ const. [960], il s'ensuit de là que l'équation (2) doit alors être vérifiée pour $dv = 0$, auquel cas $\sin\theta = 0$, $d\theta = 0$, et l'équation (2) se réduit à

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0.$$

Donc E est une constante ou une fonction de u seulement. Puisque $\cos\theta = 1$, on a $ds = d_u s = \sqrt{E}.du$, ce qui devait être, cette expression étant ce que devient la valeur générale de ds pour $dv = 0$.

On peut maintenant supposer que u exprime la longueur de l'arc d'une ligne du système $v =$ const., compté à partir d'une ligne fixe qui la traverse. Alors $d_u s = du$, d'où $\sqrt{E} = 1$, $E = 1$. Ainsi, du sera l'élément d'une ligne de plus courte distance dont la position est déterminée par la variable v.

Si l'on imagine que toutes les lignes géodésiques $v =$ const. partent d'un même point o, on pourra prendre pour v l'angle que fait une quelconque de ces lignes avec une d'entre elles, considérée comme fixe, et que l'on représentera par $v = 0$. Les lignes $u =$ const. seront alors les cercles géodésiques, trajectoires orthogonales des lignes $v =$ const., de sorte que u et v seront ce que nous avons désigné au n° 698 par s et φ.

984. Dans le cas où, les lignes $v =$ const. étant des lignes géodésiques quelconques, les lignes $u =$ const. sont leurs trajectoires orthogonales, du l'élément de la ligne $v =$ const., et $E = 1$, l'équation (2) du n° 720 devient

$$4G^2 . k = \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 - 2G\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}.$$

L'équation aux lignes géodésiques (2) du n° 982 se réduit à

$$2\sqrt{G} . d\theta + \frac{\partial G}{\partial u} dv = 0.$$

Si l'on pose, pour abréger, $\sqrt{G} = m$, alors ces deux équations prennent la forme plus simple

$$(3) \qquad k = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial u^2}, \quad d\theta = -\frac{\partial m}{\partial u} dv.$$

Dans le cas où, les lignes $v =$ const. partant d'un même point, les lignes $u =$ const. sont des cercles géodésiques, l'élément de cercle géodésique sera

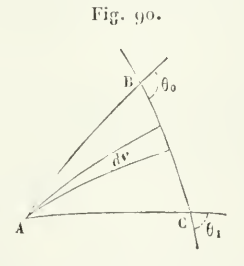
$$d_v s = \sqrt{G} . dv = m\, dv.$$

Pour u infiniment petit, le cercle sera un cercle plan de rayon u. On a donc alors $d_v s = u\, dv$. Donc

$$\lim_{u=0} \frac{m}{u} = \lim_{u=0} \frac{\partial m}{\partial u} = 1.$$

985. Considérons actuellement un triangle formé par des lignes géodésiques. Menons la ligne fixe AB ($v = 0$) et la ligne AC

Fig. 90.



($v = A$), et soit BC (*fig.* 90) la troisième ligne géodésique qui achève le triangle. Soient $B = \pi - \theta_0$, $C = \theta_1$ les deux autres

angles du triangle. Calculons la courbure absolue de ce triangle. La mesure k de la courbure en un point étant exprimée [710] par $k = \frac{d\Sigma}{dS}$, on en conclut $d\Sigma = k\,dS$, et, par conséquent, la courbure absolue a pour valeur

$$\Sigma = \int k\,dS.$$

On a d'ailleurs [984 et 982]

$$k = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial u^2}, \quad dS = m\,du\,dv.$$

Donc

$$\Sigma = -\int\int \frac{\partial^2 m}{\partial u^2}\,du\,dv = -\int dv \int \frac{\partial^2 m}{\partial u^2}\,du = -\int dv\left(\frac{\partial m}{\partial u} + c\right),$$

c étant une constante arbitraire. Or, la quantité sous le signe $\int$, dans la dernière intégrale, est la courbure absolue de la portion de surface comprise entre les lignes $v = v$ et $v = v + dv$. Mais, pour $u = 0$, la courbure absolue s'évanouit; donc, pour $u = 0$,

$$\int dv\left(\frac{\partial m}{\partial u} + c\right) = 0.$$

Or, pour $u = 0$, $\frac{\partial m}{\partial u}$ a pour limite l'unité [984]. Donc $c = -1$, et par suite [984]

$$\Sigma = \int dv\left(1 - \frac{\partial m}{\partial u}\right) = \int du + \int d\theta.$$

Pour étendre cette expression à tout le triangle, il faut faire varier v de 0 à A, et θ de θ_0 à θ_1. Donc

$$\Sigma = A + \theta_1 - \theta_0 = A + B + C - \pi.$$

Donc la courbure absolue du triangle ABC est égale à l'aire du triangle sphérique tracé sur une sphère de rayon $= 1$ et ayant ses angles égaux à ceux du triangle géodésique.

On étend facilement ce théorème aux polygones formés par des lignes géodésiques.

986. *Exemples.* — 1° Pour l'hélicoïde gauche, représenté par les équations

$$x = a\cos v.u, \quad y = a\sin v.u, \quad z = bv,$$

les lignes $v=$ const. étant des lignes droites et par suite des lignes géodésiques, on a, en échangeant entre elles les variables u et v dans les formules du n° 734,

$$E = a^2, \quad F = 0, \quad G = a^2u^2 + b^2,$$

d'où, en substituant dans l'équation (2) du n° 720, qui devient, pour E constant,

$$4EG^2.k = \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 - 2G\frac{\partial^2 G}{\partial u^2},$$

$$k = -\frac{b^2}{(a^2u^2+b^2)^2},$$

comme nous l'avions déjà trouvé. Ensuite

$$ds\cos\theta = a\,du, \quad ds\sin\theta = \sqrt{a^2u^2+b^2}\,.\,dv,$$

d'où

$$-\sin\theta\,d\theta = a\,d\frac{du}{ds} = -d\theta\sqrt{G}\,\frac{dv}{ds};$$

substituant cette valeur de $d\theta\sqrt{G}$ dans l'équation (2) [982], elle donne

$$ds\,d\frac{du}{ds} = u\,dv^2.$$

En développant et mettant pour ds^2 sa valeur $a^2du^2 + G\,dv^2$, d'où $ds\,d^2s = a^2du(d^2u + dv^2)$, il vient

$$(a^2u^2+b^2)\left(\frac{d^2u}{dv^2} - u\right) - 2a^2u\frac{du^2}{dv^2} = 0.$$

Cette équation, ne contenant pas explicitement la variable indépendante v, est susceptible d'abaissement [872]. Si l'on pose $\frac{du^2}{dv^2} = w$, il vient

$$\frac{d^2u}{dv^2} = \frac{1}{2}\frac{dw}{du},$$

et l'équation prend la forme

$$\frac{dw}{du} - \frac{4a^2u}{a^2u^2+b^2}w = 2u,$$

équation linéaire que l'on sait intégrer [821].

987. 2° Étudions encore les lignes géodésiques de l'ellipsoïde. Des équations [721]

$$bcx = \lambda uv,$$
$$b\sqrt{c^2-b^2}.y = \sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{u^2-b^2}\sqrt{b^2-v^2},$$
$$c\sqrt{c^2-b^2}.z = \sqrt{\lambda^2-c^2}\sqrt{c^2-u^2}\sqrt{c^2-v^2},$$

on tire

$$bcx' = \lambda v,$$
$$b\sqrt{c^2-b^2}.y' = \sqrt{\lambda^2-b^2}.\frac{u\sqrt{b^2-v^2}}{\sqrt{u^2-b^2}},$$
$$c\sqrt{c^2-b^2}.z' = -\sqrt{\lambda^2-c^2}.\frac{u\sqrt{c^2-v^2}}{\sqrt{c^2-u^2}},$$
$$bcx_{\prime} = \lambda u,$$
$$b\sqrt{c^2-b^2}.y_{\prime} = -\sqrt{\lambda^2-b^2}.\frac{v\sqrt{u^2-b^2}}{\sqrt{b^2-v^2}},$$
$$c\sqrt{c^2-b^2}.z_{\prime} = -\sqrt{\lambda^2-c^2}.\frac{v\sqrt{c^2-u^2}}{\sqrt{c^2-v^2}}.$$

On en conclut, toutes réductions faites, $F = 0$, puis

$$E = \frac{(\lambda^2-u^2)(u^2-v^2)}{(u^2-b^2)(c^2-u^2)}, \qquad G = \frac{(\lambda^2-v^2)(u^2-v^2)}{(b^2-v^2)(c^2-v^2)},$$
$$\frac{\partial E}{\partial v} = -\frac{2(\lambda^2-u^2)v}{(u^2-b^2)(c^2-u^2)}, \quad \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{2(\lambda^2-v^2)u}{(b^2-v^2)(c^2-v^2)}.$$

D'après ces valeurs, en remarquant que les équations

$$ds\cos\theta = \sqrt{E}.du, \quad ds\sin\theta = \sqrt{G}.dv$$

donnent

$$\sqrt{EG} = \sin\theta\cos\theta\,\frac{ds^2}{du\,dv},$$
$$2\sin\theta\cos\theta\,d\theta.\frac{ds^2}{du\,dv} = \frac{\partial E}{\partial v}\,du - \frac{\partial G}{\partial u}\,dv,$$

l'équation aux lignes géodésiques [982] devient

$$2\sin\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{\partial E}{\partial v}\,dv\left(\frac{du}{ds}\right)^2 - \frac{\partial G}{\partial u}\,du\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = \frac{\partial E}{\partial v}\,dv.\frac{\cos^2\theta}{E} - \frac{\partial G}{\partial u}\,du\,\frac{\sin^2\theta}{G}$$
$$= -\frac{2v\,dv}{u^2-v^2}\cos^2\theta - \frac{2u\,du}{u^2-v^2}\,\sin^2\theta,$$
$$u^2\,d(\sin^2\theta) + v^2\,d(\cos^2\theta) + \sin^2\theta\,d(u^2) + \cos^2\theta\,d(v^2) = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$(1)\qquad u^2 \sin^2\theta + v^2 \cos^2\theta = C,$$

équation qui a lieu en tous les points d'une ligne géodésique d'un ellipsoïde.

Remarquons que cette équation a lieu aussi pour tous les points d'une ligne de courbure, comme on le voit en faisant $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne les équations $v =$ const. ou $u =$ const. des lignes de courbure.

988. Si l'on met pour $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$ leurs valeurs

$$\sin^2\theta = \frac{G\,dv^2}{ds^2} = \frac{G\,dv^2}{E\,du^2 + G\,dv^2}, \qquad \cos^2\theta = \frac{E\,du^2}{E\,du^2 + G\,dv^2},$$

l'équation (1) devient

$$(2)\qquad E\,du^2(v^2 - C) + G\,dv^2(u^2 - C) = 0,$$

ou, en mettant pour E et G leurs valeurs.

$$(3)\qquad \frac{du\sqrt{\lambda^2 - u^2}}{\sqrt{(u^2 - b^2)(c^2 - u^2)(u^2 - C)}} = \pm \frac{dv\sqrt{\lambda^2 - v^2}}{\sqrt{(b^2 - v^2)(c^2 - v^2)(C - v^2)}},$$

équation différentielle des lignes géodésiques de l'ellipsoïde, dont l'intégrale dépend des fonctions abéliennes.

Pour avoir la longueur d'un arc de ligne géodésique, mettons pour $G\,dv^2$ sa valeur tirée de (2) dans la formule $ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$, puis pour E sa valeur tirée du n° 987. Il vient

$$ds^2 = \frac{E\,du^2(u^2 - v^2)}{u^2 - C} = \frac{(u^2 - v^2)^2(\lambda^2 - u^2)}{(u^2 - b^2)(c^2 - u^2)(u^2 - C)}\,du^2,$$

d'où, en extrayant la racine carrée et ayant égard à l'équation (3),

$$ds = \frac{u^2\sqrt{\lambda^2 - u^2}\,.\,du}{\sqrt{(u^2 - b^2)(c^2 - u^2)(u^2 - C)}} \mp \frac{v^2\sqrt{\lambda^2 - v^2}\,.\,dv}{\sqrt{(b^2 - v^2)(c^2 - v^2)(C - v^2)}}.$$

L'arc géodésique est ainsi exprimé par la somme de deux intégrales abéliennes.

989. Si l'on fait $b = 0$, on obtiendra un ellipsoïde de révolution aplati, et les expressions précédentes se ramèneront aux intégrales elliptiques. En effet, dans ce cas, on remplacera l'hyperboloïde à deux nappes par un plan

$$y = vx,$$

et les équations des deux autres surfaces deviendront

$$\frac{x^2+y^2}{\lambda^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1, \quad \frac{x^2+y^2}{u^2} - \frac{z^2}{c^2 - u^2} = 1.$$

En opérant comme au n° **721**, on trouvera

$$x^2 + y^2 = \frac{\lambda^2 u^2}{c^2}, \quad z^2 = \frac{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - u^2)}{c^2},$$

d'où

$$x = \frac{\lambda u}{c\sqrt{1+v^2}}, \qquad y = \frac{\lambda u v}{c\sqrt{1+v^2}}, \qquad z = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - u^2)}}{c},$$

$$x' = \frac{\lambda}{c\sqrt{1+v^2}}, \qquad y' = \frac{\lambda v}{c\sqrt{1+v^2}}, \qquad z' = -\frac{u\sqrt{\lambda^2 - c^2}}{c\sqrt{c^2 - u^2}},$$

$$x_{\prime} = -\frac{\lambda u v}{c(1+v^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad y_{\prime} = \frac{\lambda u}{c(1+v^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad z_{\prime} = 0,$$

$$E = \frac{\lambda^2 - u^2}{c^2 - u^2}, \qquad F = 0, \qquad G = \frac{\lambda^2 u^2}{c^2(1+v^2)^2},$$

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{2G}{u}.$$

L'équation des lignes géodésiques se réduit à

$$2.\sqrt{EG}.d\theta = -\frac{\partial G}{\partial u} dv.$$

Par un calcul semblable à celui du n° **987**, on en tire

$$2 \sin\theta \cos\theta \, d\theta = -\frac{du\,dv}{ds^2}\frac{\partial G}{\partial u} dv = -\frac{\partial G}{\partial u} du \frac{\sin^2\theta}{G} = -\frac{2\,du}{u}\sin^2\theta,$$

$$\frac{du}{u} + \frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin\theta} = 0, \quad u \sin\theta = C,$$

C étant une constante arbitraire.

Cette équation peut s'écrire

$$u.\frac{\sqrt{G}.dv}{ds} = C,$$

ou, en mettant pour G et ds leurs valeurs,

$$\frac{dv}{1+v^2} = \frac{C c du \sqrt{\lambda^2 - u^2}}{u\sqrt{(c^2-u^2)(u^2-C^2)}},$$

équation qui s'intègre au moyen des transcendantes elliptiques.

Pour l'élément d'arc, on trouve

$$ds = \frac{\sqrt{G}}{C} u dv = \frac{\lambda u^2 dv}{Cc(1+v^2)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - u^2}.u du}{\sqrt{c^2-u^2}\sqrt{u^2-C^2}},$$

ce qui conduit encore aux transcendantes elliptiques.

990. Si dans l'équation

$$(1) \qquad u^2 \sin^2\theta + v^2 \cos^2\theta = C$$

on fait $u^2 = C$, il viendra, u étant généralement différent de v,

$$(u^2 - v^2)\cos^2\theta = 0,$$

d'où résulte

$$\cos\theta = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Donc, au point où $u^2 = C$, la ligne géodésique sera tangente à la ligne de courbure $u = \text{const}$. De même, pour $v^2 = C$, la ligne géodésique sera tangente à la ligne de courbure $v = \text{const}$. Ainsi $u^2 = C$ et $v^2 = C$ déterminent les points où la ligne géodésique est tangente aux lignes de courbure.

991. Pour un ombilic, on a [686, (II)]

$$y = 0, \quad x = \frac{b}{c}\lambda.$$

La condition $y = 0$ donne

$$(u^2 - b^2)(b^2 - v^2) = 0.$$

On a d'ailleurs

$$x = \frac{\lambda uv}{bc}, \quad \text{d'où} \quad b^2 = uv;$$

l'équation $y = 0$ devient donc

$$uv(u - v)^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$u = v = b.$$

Maintenant l'équation $u^2 \sin^2\theta + v^2 \cos^2\theta = C$ donne, pour ces valeurs,

$$b^2 = C.$$

Telle est la valeur de la constante C pour une ligne géodésique passant par un ombilic.

992. Supposons que l'on ait tracé deux lignes de courbure d'un même système $u =$ const., et renfermant dans leur intérieur deux ombilics voisins. Considérons les lignes géodésiques menées d'un point M de la ligne extérieure tangentiellement à la ligne intérieure aux points A et A'. Ces deux lignes géodésiques étant tangentes à une même ligne de courbure, la constante C sera la même pour toutes les deux [990]. On aura donc, au point $M(u, v)$,

$$u^2 \sin^2\theta + v^2 \cos^2\theta = u^2 \sin^2\theta' + v^2 \cos^2\theta'$$

ou

$$(u^2 - v^2)(\sin^2\theta - \sin^2\theta') = 0,$$

et, puisque u et v sont différents entre eux, il en résulte

$$\sin\theta = \sin\theta', \quad \theta = \theta'.$$

Donc les deux lignes géodésiques sont également inclinées sur la ligne de courbure $v =$ const., et par suite aussi sur l'autre ligne de courbure $u =$ const.

Le même théorème a lieu lorsque, au lieu d'être tangentes à la même ligne $u =$ const., les lignes géodésiques sont menées par les deux ombilics.

On déduit de là, par une démonstration toute pareille à celle

que l'on emploie pour trouver la tangente à l'ellipse, que la somme des lignes géodésiques qui vont des ombilics aux divers points d'une ligne de courbure $u =$ const. est constante, de manière que cette ligne de courbure peut se décrire au moyen d'un fil dont les extrémités sont fixées aux deux ombilics et que l'on tient tendu sur l'ellipsoïde, absolument comme on décrit une ellipse au moyen d'un fil dont les extrémités sont fixées à ses deux foyers.

On verrait de même que la différence des distances géodésiques des divers points de la ligne $v =$ const. aux deux ombilics est constante.

Supposons enfin un fil fermé, enroulé autour d'une ligne de courbure $u =$ const. et tel que, en le tenant tendu sur la surface, le sommet de l'angle formé par ses deux branches soit au point M d'une autre ligne $u =$ const. Imaginons que la longueur du fil varie, s'il est nécessaire, de manière que le sommet des deux branches se trouve en un autre point M_1 de la même ligne de courbure. Puisque MA et MA' sont tangentes à une même ligne de courbure $u =$ const., elles coupent sous des angles égaux ou supplémentaires la ligne $v =$ const. menée par le point M. Donc elles font des angles égaux avec l'arc MM_1. On conclut de là que la longueur $AMA'A'_1$ est égale à la longueur $AA_1M_1B_1$, A_1 et B_1 étant les points de contact des lignes géodésiques partant de M_1. Donc, un fil fermé étant enroulé sur une ligne de courbure $u =$ const. et étant tendu sur la surface, l'intersection mobile de ses deux branches décrira une autre ligne de courbure du même système.

993. II. *Trouver la courbe d'aire maximum parmi toutes les courbes isopérimètres.*

On demande que l'on ait

$$u = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx = \text{maximum}, \quad \text{pour} \quad v = \int_{x_0}^{x_1} ds = a.$$

Il faut, par la règle du n° 977, chercher le maximum absolu de l'intégrale

$$w = u + \lambda v = \int_{x_0}^{x_1} \left(y + \lambda \frac{ds}{dx}\right) dx.$$

La variation de cette intégrale est

$$\delta v = \left[\left(y + \lambda \frac{ds}{dx}\right)\delta x\right]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1}\left(\delta y + \lambda\,\delta\frac{ds}{dx}\right)dx;$$

d'ailleurs

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta\frac{ds}{dx}\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{y'\delta y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\frac{dy}{ds}\,d\,\delta y$$

$$= \left[\frac{dy}{ds}(\delta y - y'\delta x)\right]_0^1 - \int_{x_0}^{x_1}\delta y\,d\frac{dy}{ds},$$

d'où, en réduisant, comme au n° 979,

$$\delta v = \left[y\,\delta x + \lambda\left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y\right)\right]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1}\left(dx - d\frac{dy}{ds}\right)\delta y.$$

On en tire d'abord successivement

$$dx - \lambda\,d\frac{dy}{ds} = 0, \quad dy = \frac{(x-C)\,dx}{\sqrt{\lambda^2-(x-C)^2}},$$

$$(x-C)^2 + (y-C')^2 = \lambda^2,$$

équation d'un cercle de rayon λ.

Si les extrémités (x_0, y_0), (x_1, y_1) sont données, on aura, pour déterminer C, C′, λ, les trois équations

$$(1)\qquad \begin{cases}(x_0-C)^2+(y_0-C')^2=\lambda^2,\\ (x_1-C)^2+(y_1-C')^2=\lambda^2,\end{cases}$$

$$(2)\qquad \arccos\frac{x_1-C}{\lambda} - \arccos\frac{x_0-C}{\lambda} = \frac{a}{\lambda}.$$

En posant $\frac{x_0-C}{\lambda} = \varphi_0$, $\frac{x_1-C}{\lambda} = \varphi_1$, il vient

$$C = x_0 - \lambda\cos\varphi_0 = x_1 - \lambda\cos\varphi_1,$$

$$C' = y_0 - \lambda\sin\varphi_0 = y_1 - \lambda\sin\varphi_1,$$

$$\lambda(\varphi_1 - \varphi_0) = a,$$

d'où

$$x_1 - x_0 = \quad 2\lambda \sin\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2},$$

$$y_1 - y_0 = -2\lambda \sin\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2},$$

$$\sin\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} = \frac{1}{2\lambda}\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \sin\frac{a}{2\lambda},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} = -\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}.$$

Au moyen de ces équations, on trouvera d'abord λ par la résolution d'une équation de la forme

$$\frac{k}{2\lambda} = \sin\frac{a}{2\lambda};$$

puis on en tirera φ_0 et φ_1, et par suite C et C′.

Si les extrémités (x_0, y_0), (x_1, y_1) sont arbitraires, l'équation $H = 0$ donnera, pour chacune des deux limites,

$$y + \lambda\frac{dx}{ds} = 0, \quad \frac{dy}{ds} = 0.$$

La seconde de ces équations fait voir qu'à chacune des deux limites on a

$$\frac{dx}{ds} = \pm 1, \quad \text{d'où} \quad y_0 = y_1 = \mp\lambda.$$

Les équations (1) donneront donc

$$x_0 = x_1,$$

et l'équation (2)

$$\frac{a}{\lambda} = 2\pi.$$

L'arc de cercle est donc égal à la circonférence entière. Puisque $\left[\frac{dy}{ds}\right]_0 = \left[\frac{dy}{ds}\right]_1 = 0$, il faut que

$$x_0 = x_1 = C, \quad \text{d'où} \quad (\lambda \pm C')^2 = \lambda^2, \quad C'(C' \pm 2\lambda) = 0,$$

et par conséquent

$$C' = 0, \quad \text{ou bien} \quad C' = \mp 2\lambda = 2y_0.$$

994. Traitons le même problème au moyen des coordonnées polaires. On doit avoir dans ce cas, en supposant la courbe fermée,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 dp = \text{maximum}, \quad \text{pour} \quad \int_0^{2\pi} \sqrt{dr^2 + r^2 dp^2} = a.$$

On tire de là, les limites de l'intégrale étant constantes,

$$\begin{aligned} 0 = \delta \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^2 + \lambda \sqrt{r^2 + r'^2} \right) dp &= \int_0^{2\pi} \left(r\delta r + \lambda \frac{r\delta r + r'\delta r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \right) dp \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\left(1 + \lambda \frac{dp}{ds} \right) r \delta r\, dp + \lambda \frac{dr}{ds} d\delta r \right] \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\left(1 + \lambda \frac{dp}{ds} \right) r\, dp - \lambda d \frac{dr}{ds} \right] \delta r; \end{aligned}$$

l'équation différentielle de la courbe sera donc

$$(1) \qquad \left(1 + \lambda \frac{dp}{ds} \right) r\, dp - \lambda d \frac{dr}{ds} = 0.$$

La variable indépendante p n'entrant pas dans cette équation, combinons celle-ci avec l'équation

$$(2) \qquad dV = r\, dr + \lambda d \frac{ds}{dp} = r\, dr + \lambda \left(\frac{dr}{ds} d \frac{dr}{dp} + r\, dp \frac{dr}{ds} \right);$$

en ajoutant à (2) l'équation (1) multipliée par $-\frac{dr}{dp}$, il vient, toutes réductions faites,

$$dV = \lambda d \left(\frac{dr}{ds} \frac{dr}{dp} \right),$$

d'où, en intégrant,

$$V = \frac{1}{2} r^2 + \lambda \frac{ds}{dp} = C + \lambda \frac{dr^2}{dp\, ds},$$

ou, en réduisant,

$$\frac{1}{2} r^2 + \lambda \frac{r^2 dp}{ds} = C.$$

On tire de là

$$dp = -\frac{\left(C - \frac{1}{2}r^2\right)dr}{r\sqrt{\lambda^2 r^2 - \left(C - \frac{1}{2}r^2\right)^2}} = -\frac{\left(\frac{2C}{r^2} - 1\right)dr}{\sqrt{4\lambda^2 + 8C - \left(r + \frac{2C}{r}\right)^2}},$$

$$p - C' = \operatorname{arc\,sin}\frac{r + \frac{2C}{r}}{\sqrt{4\lambda^2 + 8C}},$$

$$r^2 - 2r.\sqrt{\lambda^2 + 2C}.\sin(p - C') + 2C = 0,$$

équation d'un cercle de rayon λ. Ainsi λ est déterminé, le périmètre du cercle étant donné. Les constantes C, C', qui ne dépendent que de la position du cercle, sont indéterminées.

Si, au lieu de la courbe fermée tout entière, on demandait seulement le maximum de l'aire d'une portion de courbe passant par deux points donnés, les trois constantes seraient déterminées par les conditions que l'arc soit de longueur donnée et passe par les deux points donnés.

995. Soit proposé de trouver, parmi toutes les lignes de longueur donnée tracées sur une surface donnée, quelle est celle qui comprend une aire maximum. Si l'on désigne par ds l'élément d'arc de cette courbe et par dS l'élément d'aire de la surface, il faudra que, pour des limites convenables, on ait [977]

$$\delta\int(dS + \lambda ds) = 0.$$

Supposons maintenant que l'on ait tracé sur la surface un système de lignes $u =$ const., dont la ligne cherchée fasse partie, et le système des trajectoires orthogonales $v =$ const. des lignes $u =$ const. Alors toute ligne infiniment voisine de la ligne cherchée $u = u_0$ pourra être représentée par $u = u_0 + \delta u$, le signe δ exprimant que l'on a fait varier u seulement, en laissant v constant. La variation de l'aire S, étant l'aire comprise entre les courbes $u = u_0$ et $u = u_0 + \delta u$, aura pour expression $\int \delta u\, dv$ [720], et, par suite, la variation de la différentielle dS de cette aire sera

$$\delta\, dS = \delta u\, dv.$$

Ici d indique une différentiation partielle par rapport à v, ∂ une différentiation partielle par rapport à u.

Maintenant, dx, dy, dz étant les projections de l'arc $ds = dv$, et ∂x, ∂y, ∂z celles de l'arc ∂u, perpendiculaire à dv, on a évidemment

$$(1) \qquad dx\,\partial x + dy\,\partial y + dz\,\partial z = 0.$$

Si dans l'expression

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

on change u en $u + \partial u$, il vient

$$(2) \qquad ds\,\partial\,ds = dx\,\partial\,dx + dy\,\partial\,dy + dz\,\partial\,dz.$$

En changeant, dans (1), v en $v + dv$, après avoir divisé par ds, on trouve

$$0 = \frac{dx}{ds}\partial\,dx + \frac{dy}{ds}\partial\,dy + \frac{dz}{ds}\partial\,dz + \partial x\,d\frac{dx}{ds} + \partial y\,d\frac{dy}{ds} + \partial z\,d\frac{dz}{ds},$$

et, en combinant cette équation avec (2),

$$(3) \qquad \partial\,ds = -\left(\partial x\,d\frac{dx}{ds} + \partial y\,d\frac{dy}{ds} + \partial z\,d\frac{dz}{ds}\right).$$

Or $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ sont les cosinus des angles que fait l'arc ∂u avec les axes coordonnés; $\frac{1}{d\tau}d\frac{dx}{ds}$, ..., ou $\frac{\rho}{ds}d\frac{dx}{ds}$, $\frac{\rho}{ds}d\frac{dy}{ds}$, $\frac{\rho}{ds}d\frac{dz}{ds}$ sont les cosinus des angles que la normale principale à la courbe $u = u_0$ fait avec les mêmes axes. En appelant donc ε l'angle que font entre eux l'élément d'arc ∂u avec la normale principale à la courbe $u = u_0$, dont l'élément d'arc est $ds = dv$, on aura, d'après l'équation (3),

$$(4) \qquad \partial\,ds = -\,dv\,\partial u\frac{\cos\varepsilon}{\rho}.$$

Cela posé, la variation de l'intégrale $\int(dS + \lambda\,ds)$ deviendra

$$\int\partial u\left(dv - \lambda\,dv\frac{\cos\varepsilon}{\rho}\right),$$

et, pour qu'elle soit nulle, il faut que l'on ait

$$1 - \lambda\frac{\cos\varepsilon}{\rho} = 0, \quad \text{d'où} \quad \cos\varepsilon = \frac{\rho}{\lambda}.$$

Donc la courbe cherchée, d'aire maximum, est caractérisée par la propriété que, en chacun de ses points, son rayon de courbure a une longueur proportionnelle au cosinus de l'angle que fait sa direction avec la tangente à la trajectoire orthogonale à la courbe sur la surface, ou, ce qui est la même chose, au cosinus de l'angle compris entre le plan osculateur de la courbe et le plan tangent à la surface.

Si la surface est plane, ce dernier angle est nul, d'où $\rho = \text{const.}$, ce qui donne la propriété du cercle trouvée au nº 993.

996. III. *Déterminer la courbe dont la révolution autour d'un axe donné engendre une aire minimum.*

Il s'agit de trouver le minimum de l'intégrale $2\pi\int_{x_0}^{x_1} y\,ds$ [754], ou de

$$u = \int_{x_0}^{x_1} y\frac{ds}{dx}\,dx.$$

En prenant la variation de cette intégrale, il vient

$$\delta u = \left[y\frac{ds}{dx}\,\delta x\right]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} dx\left(\frac{ds}{dx}\,\delta y + y\,\delta\frac{ds}{dx}\right),$$

$$\int_{x_0}^{x_1} y\,dx\,\delta\frac{ds}{dx} = \int_{x_0}^{x_1} dx\,\frac{yy'\,\delta y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \int y\frac{dy}{ds}\,d\delta y$$

$$= \left[y\frac{dy}{ds}(\delta y - y'\,\delta x)\right]_0^1 - \int_{x_0}^{x_1} \delta y\,d\frac{y\,dy}{ds};$$

donc

$$\delta u = \left[\left(\frac{ds}{dx} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right)y\,\delta x + \frac{y\,dy}{ds}\,\delta y\right]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} \delta y\left(ds - d\frac{y\,dy}{ds}\right)$$

$$= \left[y\frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y}{ds}\right]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} \delta x\left(ds - d\frac{y\,dy}{ds}\right).$$

L'équation différentielle de la courbe cherchée sera donc

$$(1)\qquad ds - d\frac{y\,dy}{ds} = 0,$$

d'où l'on conclut que la courbe jouit de la propriété exprimée par

l'équation

$$(2) \qquad s + C = y\frac{dy}{ds},$$

c'est-à-dire que la différence entre l'arc et la distance entre le point (x, y) et le pied de la perpendiculaire abaissée du pied de l'ordonnée sur la tangente en (x, y) est constante. En intégrant de nouveau, il vient

$$(3) \qquad y^2 = (s + C)^2 + C'^2.$$

Or $y^2 - (s + C)^2 = y^2 - \left(y\frac{dy}{ds}\right)^2 =$ le carré de la distance du pied de l'ordonnée à la tangente. Donc, dans la courbe en question, la tangente touche un cercle de rayon constant C', ayant pour centre le pied de l'ordonnée.

Pour avoir l'équation en coordonnées rectangulaires, on tire des équations (2) et (3)

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \left(\frac{s + C}{y}\right)^2 = \frac{(s + C)^2}{(s + C)^2 + C'^2},$$

d'où

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{1 - \frac{dy^2}{ds^2}} = \frac{C'}{\sqrt{(s + C)^2 + C'^2}},$$

d'où

$$s + C = C'.\mathrm{Sh}\frac{x + C''}{C'},$$

et, en substituant dans (3),

$$(4) \qquad y = C'.\mathrm{Ch}\frac{x + C''}{C'},$$

équation d'une chaînette.

Si les extrémités sont données, on déterminera les constantes C', C'' par la condition que la courbe passe par ces extrémités.

Si l'une des extrémités (x_0, y_0) est mobile sur une courbe donnée $f(x_0, y_0) = 0$, comme on ne peut pas poser $y_0 = 0$, il faudra qu'on ait

$$\partial x_0\, dx_0 + \partial y_0\, dy_0 = 0;$$

la chaînette devra donc rencontrer normalement cette courbe.

Nous disons que l'on ne peut pas poser $y_0 = 0$. En effet, le

second membre de l'équation (4) ne peut s'annuler pour C′ différent de zéro, et, en le mettant sous la forme

$$(x + C'')\frac{C'}{x + C''}\,\mathrm{Ch}\,\frac{x + C''}{C'} = (x + C'')\frac{\mathrm{Ch}\,X}{X},$$

où $X = \dfrac{x + C''}{C'}$, on voit qu'il tend vers l'infini, et non vers zéro, lorsqu'on fait tendre C′ vers zéro, et par suite X vers l'infini.

Cependant, si les extrémités étaient complétement indéterminées, la condition aux limites donnerait $y_0 = 0$, $y_1 = 0$. Ces valeurs, incompatibles avec l'intégrale générale (4) de l'équation (1), montrent qu'il faut prendre la solution singulière $y = 0$ de cette équation. On peut, en effet, mettre celle-ci sous la forme

$$\sqrt{1 + y'^2}\,dy - y'\,d\frac{y\,dy}{ds} = 0,$$

et l'on voit qu'elle est vérifiée par $y = 0$, ce qui tient à ce qu'on a introduit le facteur étranger dy. Pour l'intégrer sous cette forme, posons

$$\frac{dy}{ds} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = t, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{t} - d(ty) = 0,$$

$$\frac{dy}{y} - \frac{t\,dt}{1 - t^2} = 0, \quad \frac{y}{C} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} = \sqrt{1 + y'^2}.$$

En posant $\dfrac{y}{C} = \mathrm{Ch}\,\varphi$, on a $y' = \mathrm{Sh}\,\varphi = C\,\mathrm{Sh}\,\varphi\,\dfrac{d\varphi}{dx}$, d'où

$$dx = C\,d\varphi, \quad \varphi = \frac{x + C'}{C}, \text{ etc.}$$

En appliquant la méthode générale [975, 2°], V ne contenant pas x, on aurait pu abaisser immédiatement l'ordre de l'équation en posant

$$C = V - Qy' = y\sqrt{1 + y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}}, \text{ etc.}$$

997. IV. *Parmi toutes les courbes isopérimètres, trouver celle qui engendre la surface de révolution d'aire minimum, ou, ce qui revient au même, celle qui a son centre de gravité le plus bas possible.*

On doit avoir $\int y\,ds =$ maximum pour $\int ds = a$, ce qui conduit à la condition

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} (y + \lambda)\, ds = 0.$$

Cette équation ne diffère de celle que nous avons traitée dans le cas précédent que par le changement de y en $y + \lambda$. On aura donc pour la courbe cherchée la chaînette

$$y + \lambda = \mathrm{C'}\,\mathrm{Ch}\,\frac{x + \mathrm{C''}}{\mathrm{C'}}.$$

On aura une constante de plus à déterminer et une condition de plus $\int_{x_0}^{x_1} ds = a$.

998. V. *Brachistochrone.* — Le temps de la chute d'un corps pesant sur une courbe quelconque, depuis la hauteur x_0 jusqu'à la hauteur x_1 au-dessus du plan horizontal, est exprimé par l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{X}\, ds,$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{X} = \frac{1}{\sqrt{x - x_0}}.$$

Il s'agit donc de rendre minimum l'intégrale

$$u = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{X}\, ds.$$

En prenant la variation de cette intégrale par rapport à toutes les variables dont elle dépend, il vient

$$\begin{aligned}\delta u &= \left[\mathrm{X}\frac{ds}{dx}\,\delta x\right]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} (\delta \mathrm{X}\, ds + \mathrm{X}\,\delta\, ds)\\ &= \left[\mathrm{X}\frac{ds}{dx}\,\delta x\right]_0^1 + \delta x_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x_0}\, ds + \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{X}\,\delta\, ds.\end{aligned}$$

On a maintenant

$$\int_{x_0}^{x_1} X\delta\, ds = \int_{x_0}^{x_1} X\, dx\, \delta\frac{ds}{dx} = \int_{x_0}^{x_1} X\, dx\left(\frac{dy}{ds}\delta y' + \frac{dz}{ds}\delta z'\right)$$

$$= \left[X\frac{dy}{ds}(\delta y - y'\delta x) + X\frac{dz}{ds}(\delta z - z'\delta x)\right]_0^1$$

$$-\int_{x_0}^{x_1}\left[\delta y . d\left(X\frac{dy}{ds}\right) + \delta z . d\left(X\frac{dz}{ds}\right)\right],$$

d'où enfin, en réduisant,

$$\delta u = \left[X\left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z\right)\right]_0^1$$

$$+ \delta x_0 \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial X}{\partial x_0} ds - \int_{x_0}^{x_1}\left[\delta y . d\left(X\frac{dy}{ds}\right) + \delta z . d\left(X\frac{dz}{ds}\right)\right].$$

Si l'on suppose les coordonnées y, z indépendantes entre elles, on aura, pour les équations différentielles de la courbe cherchée,

$$d\left(X\frac{dy}{ds}\right) = 0, \quad d\left(X\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

d'où l'on tire

$$X\frac{dy}{ds} = C_1, \quad X\frac{dz}{ds} = C_2,$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{C_1}{C_2} = C, \quad y = Cz + C'.$$

La courbe est donc située tout entière dans un plan vertical.

Prenons maintenant ce plan pour plan des xy, ce qui revient à prendre la droite $y - Cz - C' = 0$ pour nouvel axe des z et la perpendiculaire abaissée de l'ancienne origine sur cette droite pour nouvel axe des y. En désignant par C'' une certaine fonction de C, C', on trouve, par rapport aux nouvelles coordonnées,

$$X\frac{dy}{ds} = C'' = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad \text{ou} \quad \frac{dy^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{x - x_0}{a},$$

ou, en posant $x - x_0 = \xi$,

$$dy = d\xi\sqrt{\frac{\xi}{a - \xi}},$$

équation différentielle d'une cycloïde ayant son point de rebroussement en (x_0, y_0), la base étant horizontale et le diamètre du cercle générateur $= a$. C'est ce qu'on vérifie immédiatement en faisant $y = \frac{a}{2}(t - \sin t)$, $\xi = \frac{a}{2}(1 - \cos t)$, différentiant et éliminant t.

999. Si les points extrêmes $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ sont donnés, on déterminera d'abord le plan vertical de la courbe par la condition qu'il passe par ces deux points, ce qui fera connaître $C = \frac{C_1}{C_2}$ et C'. En prenant A pour origine, on a $C = \frac{y_1}{z_1} = \frac{C_1}{C_2}$, $C' = 0$. Ensuite,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = C_2 \sqrt{1 + \frac{C_1^2}{C_2^2}}.$$

La condition que la cycloïde passe en B déterminera a, et par suite C_2. Si les points (x_0, y_0), (x_1, y_1) sont assujettis à rester sur des courbes données, et que l'on suppose le mobile partant de la première courbe sans vitesse initiale, l'équation $H = 0$ se partagera en deux autres :

$$0 = -\left[X\left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z\right)\right]_{x=x_0} + \delta x_0 \int \frac{\partial X}{\partial x_0} ds,$$

$$0 = \quad \left[X\left(\frac{dx}{ds}\delta x + \frac{dy}{ds}\delta y + \frac{dz}{ds}\delta z\right)\right]_{x=x_1}.$$

La seconde de ces équations donne

$$(1) \qquad dx_1 \delta x_1 + dy_1 \delta y_1 + dz_1 \delta z_1 = 0,$$

ce qui exprime que la cycloïde doit rencontrer normalement la seconde courbe.

La première équation peut se simplifier. On a, en effet, pour tous les points de la courbe,

$$d\left(X\frac{dy}{ds}\right) = 0, \quad d\left(X\frac{dz}{ds}\right) = 0;$$

or

$$\frac{dx}{ds}d\left(X\frac{dx}{ds}\right)+\frac{dy}{ds}d\left(X\frac{dy}{ds}\right)+\frac{dz}{ds}d\left(X\frac{dz}{ds}\right)$$
$$=\frac{1}{2}X.d\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds^2}+\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds^2}dX=dX.$$

Donc

$$\frac{dx}{ds}d\left(X\frac{dx}{ds}\right)=dX,$$

et par suite

$$d\left(X\frac{dx}{ds}\right)=\frac{dX}{dx}ds=-\frac{\partial X}{\partial x_0}ds.$$

D'ailleurs,

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial X}{\partial x_0}ds=-\left(X\frac{dx}{ds}\right)_1+\left(X\frac{dx}{ds}\right)_0.$$

D'après cela, l'équation relative à la limite x_0 deviendra

$$0=\left(X\frac{dx}{ds}\right)_1\partial x_0+\left(X\frac{dy}{ds}\right)_0\partial y_0+\left(X\frac{dz}{ds}\right)_0\partial z_0;$$

mais, $X\frac{dy}{ds}$ et $X\frac{dz}{ds}$ étant constants, on a

$$\left(X\frac{dy}{ds}\right)_0=\left(X\frac{dy}{ds}\right)_1,\quad \left(X\frac{dz}{ds}\right)_0=\left(X\frac{dz}{ds}\right)_1.$$

Donc

$$dx_1\partial x_0+dy_1\partial y_0+dz_1\partial z_0=0. \tag{2}$$

La tangente à la première courbe au point de départ doit donc être perpendiculaire à la tangente à la cycloïde au point d'arrivée, et, par suite, si les deux courbes sont dans un même plan, leurs tangentes aux points d'intersection avec la cycloïde seront parallèles.

Pour déterminer les constantes $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1$ et les quatre constantes arbitraires, on aura les quatre équations qui expriment que la cycloïde passe aux deux points extrêmes, les quatre équations des deux courbes données, lieux des extrémités, et les équations (1) et (2).

1000. VI. *Parmi les solides de révolution de même surface, trouver celui dont le volume est maximum.*

Les expressions de la surface et du volume étant

$$2\pi \int y\, ds, \quad \pi \int y^2\, dx,$$

on aura, pour l'équation du problème,

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \left(y^2 + \lambda y \frac{ds}{dx} \right) dx = 0.$$

En appliquant la formule $V = C + Qy'$ [975, 2°], on trouve

$$y^2 + \lambda y \frac{ds}{dx} = C + \lambda y' . y \frac{dy}{ds},$$

ou

(1) $$y^2 + \lambda y \frac{dx}{ds} = C,$$

d'où

(2) $$dx = \frac{(C - y^2)\, dy}{\sqrt{\lambda^2 y^2 - (C - y^2)^2}}.$$

Considérons maintenant l'équation aux limites

$$\left[\left(y^2 + \lambda y \frac{ds}{dx} \right) \delta x + \lambda y \frac{dy}{ds} (\delta y - y' \delta x) \right]_0^1 = 0,$$

ou

$$\left[y^2 \delta x + \lambda y \frac{dx\, \delta x + dy\, \delta y}{ds} \right]_0^1 = 0.$$

L'équation (1) réduit cette relation à

$$C(\delta x_1 - \delta x_0) + \lambda \left[y \frac{dy}{ds} \delta y \right]_0^1 = 0.$$

Si l'on ne donne aucune relation entre δx_0 et δx_1, alors, pour que cette équation soit vérifiée, il faudra que l'on ait $C = 0$, ce qui réduit l'équation (2) à

$$dx = -\frac{y\, dy}{\sqrt{\lambda^2 - y^2}},$$

d'où l'on tire

$$(x - C')^2 + y^2 = \lambda^2,$$

équation d'un cercle ayant son centre sur l'axe de révolution. Donc, dans ce cas, la surface cherchée est une sphère de rayon λ.

Si y_0, y_1 sont donnés, on a alors un segment de sphère. Pour déterminer x_0, x_1, λ, on aura les équations

$$(x_0 - C')^2 + y_0^2 = \lambda^2, \quad (x_1 - C')^2 + y_1^2 = \lambda^2, \quad \lambda(x_1 - x_0) = a^2,$$

en représentant par $2\pi a^2$ la surface donnée de la zone. On tire de là

$$\sqrt{\lambda^2 - y_1^2} - \sqrt{\lambda^2 - y_0^2} = \frac{a^2}{\lambda}, \quad \sqrt{\lambda^2 - y_1^2} + \sqrt{\lambda^2 - y_0^2} = \frac{\lambda}{a^2}(y_0^2 - y_1^2),$$

d'où

$$[4a^4 - (y_0^2 - y_1^2)]\lambda^4 - 2a^4(y_0^2 + y_1^2)\lambda^2 - a^8 = 0,$$

équation qui donne pour λ^2 une valeur positive.

Si y_0 et y_1 sont indéterminés, on a

$$y_0 = y_1 = 0,$$

et, par suite, la surface est la sphère entière.

1091. VII. *Trouver la courbe qui comprend une aire minimum entre son arc, sa développée et les deux rayons de courbure de ses extrémités.*

L'aire en question a pour expression [829]

$$\int \rho\, ds = \int \frac{(1 + y'^2)^2}{y''}\, dx.$$

La fonction V ne contenant ici ni x ni y, nous abaisserons l'ordre de l'équation de deux unités au moyen de la formule

$$V = C + C'y' + Ry'',$$

qui donne ici, à cause de $R = \dfrac{\partial V}{\partial y''} = -\dfrac{V}{y''}$,

$$2(1 + y'^2)^2 = (C + C'y')y'', \quad 2\,dx = \frac{C + C'y'}{(1 + y'^2)^2}\,dy',$$

$$4(x + C'') = C \operatorname{arc\,tang} y' + \frac{Cy' - C'}{1 + y'^2},$$

$$4(y + C''') = C' \operatorname{arc\,tang} y' - \frac{C'y' + C}{1 + y'^2},$$

équations qui représentent la courbe cherchée.

Si l'on pose $\operatorname{arc\,tang} y' = \theta$, il vient, en écrivant C, C' au lieu de $\frac{C}{4}$, $\frac{C'}{4}$,

$$x + C'' = C\theta + (C\sin\theta - C'\cos\theta)\cos\theta,$$
$$y + C''' = C'\theta - (C\cos\theta + C'\sin\theta)\cos\theta,$$

équations que l'on peut mettre sous la forme

$$x + C'' = \tfrac{1}{2}C(2\theta + \sin 2\theta) - \tfrac{1}{2}C'(1 + \cos 2\theta),$$
$$y + C''' = \tfrac{1}{2}C'(2\theta - \sin 2\theta) - \tfrac{1}{2}C(1 + \cos 2\theta),$$

ou, en désignant par k et l des constantes convenablement choisies,

$$x + C_1 = \tfrac{1}{2}C(2\theta - l) + k\sin(2\theta - l),$$
$$y + C_2 = \tfrac{1}{2}C'(2\theta - l) - k\cos(2\theta - l),$$

ou enfin, en posant $\frac{1}{2}\frac{C}{k} = n$, $\frac{1}{2}\frac{C'}{k} = n'$, $2\theta - l = t$,

$$\frac{x - c_1}{k} = nt + \sin t, \quad \frac{y - c_2}{k} = n't - \cos t,$$

c_1, c_2, k, n étant des constantes arbitraires, et $n^2 + n'^2 = 1$.

Pour $C' = 0$, on a

$$n' = 0, \quad n = 1;$$

la courbe est une cycloïde.

1002. VIII. *Étant donnée la masse d'un solide de révolution homogène, déterminer sa forme de manière que son attraction sur un point de son axe soit maximum.*

On a la masse $= \pi\rho\int y^2\,dx$, et l'attraction sur l'origine égale à $2\pi\rho\int\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx$. La condition

$$2\delta\int_{x_0}^{x_1}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx + \lambda\delta\int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx = 0$$

donne immédiatement

$$x + 2\lambda(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = 0,$$

équation de la courbe méridienne de la surface cherchée. On déterminera la constante λ par la condition

$$\pi\rho\int_{x_0}^{x_1} y^2\,dy = \text{la masse donnée.}$$

EXERCICES.

I. — Expressions différentielles du premier ordre a intégrer.

1. $(3x^2 + 2bxy - 3y^2)\,dx + (bx^2 - 6xy + 3cy^2)\,dy.$

2. $\dfrac{(x+y)\,dx + x\,dy}{\sqrt{x^2 + 2xy}}.$

3. $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 \pm y^2}.$

4. $(3ax^2 - by)\,dx + (3cy^2 + 2y - bx)\,dy.$

5. $(y\cos x + 2xy^2)\,dx + (\sin x - a\sin y + 2x^2y\,dy).$

6. $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + dy\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\right).$

7. $2x\,dx\log\dfrac{y+x}{y-x} + \dfrac{2x^2(y\,dx - x\,dy)}{y^2 - x^2}.$

8. $\dfrac{2y^3\,dy - 3xy^2\,dy + 3x^2y\,dx - 2x^3\,dx + y^3\,dx - x^3\,dy}{(y-x)^2}.$

9. $\dfrac{dx}{x} + \dfrac{y^2\,dx}{x^3} - \dfrac{y\,dy}{x^2} + \dfrac{(y\,dx - x\,dy)\sqrt{x^2+y^2}}{x^3} + \dfrac{dy}{2y}.$

10. $\dfrac{dx + x^2\,dy + dy + y^2\,dx}{(1-xy)^2}.$

11. $y^2\,dx + \dfrac{\sqrt[3]{y}}{2\sqrt{x}}\,dx + \dfrac{\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}\,dy + 2xy\,dy.$

12. $dx\sqrt{a^2+y^2} + dy\dfrac{xy + a^2 + 2y^2}{\sqrt{a^2+y^2}}.$

13. $x^{y-1}y\,dx + x^y\log x\,dy.$

14. $\dfrac{(3x^2y - 2x^3 + y^3)\,dx + (2y^3 - 3xy^2 - x^3)\,dy}{(y-x)^2}.$

15. $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{(x+y)\sqrt{2xy - 2y^2}}.$

16. $\dfrac{xy\,dx + (a^2 - x^2)\,dy}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

17. $\dfrac{y\,dx}{y+z} + \dfrac{xz\,dy}{(y+z)^2} - \dfrac{xy\,dz}{(y+z)^2}$.

18. $\dfrac{(xy - 2yz)\,dz + 2(z^2 - xz)\,dy + yz\,dx}{y^3}$.

19. $\dfrac{y-2x}{z}\,dx + \left(1 + \dfrac{x-2y}{z}\right)dy + \dfrac{x^2+y^2-xy}{z^2}\,dz$.

20. $\dfrac{x\,dy - x\,dz + z\,dx - y\,dx}{(x-y+z)^2}$.

21. $(2x - 3y + 4z)\,dx + (2y - 3x - 5z)\,dy + (2z + 4x - 5y)\,dz$.

22. $2x \operatorname{arc\,sin} \dfrac{y}{x}\,dx + \dfrac{x^2}{\sqrt{z^2-y^2}}\,dy - \dfrac{x^2y}{z\sqrt{z^2-y^2}}\,dz$.

23. $$\left\{\begin{aligned} &(2y^2 + 4ax^2z^2)\,x\,dx + \left(\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} + 3y + 2x^2\right)y\,dy \\ &\qquad + \left(4z^2 + 2ax^4 + \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)z\,dz. \end{aligned}\right.$$

24. $(y + z + w)\,dx + (z + w + x)\,dy + (w + x + y)\,dz + (x + y + z)\,dw$.

25. $\dfrac{2\sqrt{xy} - z}{2u^2\sqrt{x}}\,dx + \dfrac{x\,dy}{2u^2\sqrt{y}} - 2\,\dfrac{x\sqrt{y} - z\sqrt{x}}{u^3}\,du - \dfrac{\sqrt{x}}{u^2}\,dz$.

26. $\dfrac{x\,dy}{2\sqrt{y}} + 2xz\,dx - \dfrac{\sqrt{y}}{3\sqrt[3]{z^2}}\,dz + x^2\,dz - \dfrac{x\sqrt{y}}{z^2}\,dz - \dfrac{\sqrt[3]{z}}{2\sqrt{x}}\,dy + \dfrac{\sqrt{y}}{z}\,dx$.

27. $\dfrac{bcy\,dz - \frac{1}{2}b\sqrt{y}.dy + 2cz\,dx + a\sqrt{y}.dx - \frac{1}{2}axy^{-\frac{1}{2}}\,dy - acx\,dx}{(\sqrt{y} + cz)^2}$.

28. $$\left\{\begin{aligned} &x(2y^2 + 4ax^2z^2)\,dx + \left(\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} + 3y + 2x^2\right)y\,dy \\ &\qquad + \left(4z^2 + 2ax^4 + \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)z\,dz. \end{aligned}\right.$$

29. $\dfrac{x\,dy}{2z\sqrt{y}} + 2xz\,dx - \dfrac{dz.\sqrt{y}}{3\sqrt[3]{z^2}} + x^2\,dz - \dfrac{x\,dz.\sqrt{y}}{z^2} - \dfrac{dy.\sqrt[3]{z}}{2\sqrt{y}} + \dfrac{dx.\sqrt{y}}{z}$.

II. — Formation des équations différentielles par l'élimination des constantes.

1. $y = Ce^x$.

2. $(a+bC)(x^2 - Cy^2) = c^2C$.

3. $y = 2Cx + C'x^2$.

4. $x^2 = Cx + C'y$.

5. $y = Cx^3 - C'x$.

6. $(x-C)^2 + (y-C')^2 = C''$.

7. $y^2 = C - C'x^2$.

8. $y^2 - 2Cy + x^2 = C^2$.

9. $Cx + C'y = xy$.

10. $y = \log\sin(Cx + C')$.

11. $(1-x)y = Cx^2 + C'x + C''$.

12. $y = e^x(C + C'x + C''x^2)$.

13. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin(x + C_4)$.

14. $y = e^x(C + C'x) + C'' \operatorname{Sh}(x + C''')$.

15. Trouver deux intégrales premières de l'équation $axy'' + by' = 0$. — On procédera :

 1° Par la séparation des variables :

 2° En multipliant par $y'^{a-1}x^{b-1}dx$.

16. Même question pour les équations

$$ayy'' + by'^2 = 0, \quad y'y'' + x = 0.$$

17. Étant donnée l'équation

$$y^2 = ax + bx^2 + cx^3,$$

éliminer tour à tour, par différentiation, chacune des trois constantes a, b, c. — Intégrer chacune des trois équations résultantes.

III. — Intégration par les séries. — Deux méthodes : 1° série de Taylor ; 2° coefficients indéterminés.

1. $xy''^2 - 2y'y'' + x = 0$.

2. $xy'' - ay' + b^2xy = 0$.

3. $xy'' - y = 0.$

4. $y' + ax^n y^2 + bx^m = 0. \quad [x^{n+1} = t].$

5. $y' - y = x^3.$

6. $xy'' + 2y' + k^2 xy = 0.$

7. $y'' = xy.$

8. $y'' + \dfrac{2}{x} y' + y = 0.$

IV. — Équations différentielles du premier ordre et du premier degré.

1. $(x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\,dy = 0.$

2. $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\dfrac{dy}{y} = 0.$

3. $\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\right) dx + \left(y - \dfrac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}\right) dy = 0.$

4. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right) dy = 0.$

5. $\left(1 + \dfrac{y^2}{x^2}\right) dx - \dfrac{2y\,dy}{x} = 0.$

6. $y\,dy = (x\,dy + y\,dx)\sqrt{1 + y^2}.$

7. $$\left\{\begin{aligned} &\left(x - \frac{y^3}{x^2 + (x+y)^2} + 2x \log\frac{x}{y}\right) dx \\ &\qquad + \left(\frac{xy^2}{x^2 + (x+y)^2} - \frac{x^2}{y} + 2y \operatorname{arc\,tang} \frac{x+y}{x}\right) dy = 0. \end{aligned}\right.$$

8. $dx\sqrt{1 + y^2} - x\,dy = 0.$

9. $\dfrac{2\,dx}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \dfrac{2x\,dy}{y\sqrt{x^2 - y^2}} = 0.$

10. $\dfrac{a(x\,dx + y\,dy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} + 3by^2\,dy = 0.$

11. $(3x^2 + 2ay^2)\,dx + (4axy + 3by^2)\,dy = 0.$

12. $\dfrac{2y - x - xy'}{x(x - y)} = 0.$

13. $dx\sqrt{1-y^2} - dy\sqrt{1-x^2} = 0.$

14. $2mxy\,dx - n(a^2+x^2)dy = 0.$

15. $y\,dx - \sqrt{1-y^2}.dy = 0.$

16. $(1-y^2)dx - dy = 0.$

17. $(1+y+y^2)dx + (1+x+x^2)dy = 0.$

18. $2ay\,dx + x(a-y)dy = 0.$

19. $x - xy' = \varphi(x).$

Exemples : $\varphi(x) = \frac{1}{2}(a+x),\ \sqrt{ax},\ \frac{x^2}{a},\ \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\right)\right]^{-1}.$

20. $y\,dx(1-x^2+a)\sqrt{1+y^2} = x^2dy(1+y^2-b)\sqrt{1-x^2}.$

21. $y\left(x+4\sqrt{x}\right)dx + x^2\sqrt{y}.dy = 0.$

22. $\left(x\sqrt{y} - a\sqrt{y} - a\sqrt{b} + x\sqrt{b}\right)dx = (x^2y - bx^2 + a^2b - a^2y)dy.$

23. $(x+y)^2dy = a^2dx.\quad [x+y=z].$

24. $y' = 1 + \sqrt[3]{y-x}.$

25. $(x-y^2)dx + 2xy\,dy = 0.\quad \left[x - y^2 = u;\ \text{multiplier par } \frac{1}{x^2}\right].$

26. $(2x^3+y)dx = -x\,dy.$

27. $(1+x^2)y' - xy = a.$

28. $\left(1+a\sqrt{1+x^2}\right)dx + 2by\sqrt{1+x^2}.dy = 0.$

29. $x^3y\,dx - (2y-1)\sqrt{x}.dy = 0.$

30. $xy\,dx + 4y\sqrt{x}.dx + x^2\sqrt{y}.dy = 0.$

31. $yy' = 2x + \sqrt{2x^2-y^2-b}.$

32. $a(xy'-y) = (x+yy')\sqrt{x^2+y^2-a^2}.$

(Transformer en coordonnées polaires.)

33. $y - xy' + y'\sqrt{(ax+by)\frac{x}{y}} = 0.$

34. $a^2y' = a^2+x^2-y^2.\quad [y = x+u].$

35. $x + yy' - y'\sqrt{x^2+y^2-a^2} = 0.$

36. $\left(\frac{1}{y} + \text{séc}\,\frac{y}{x}\right) dx - \frac{x}{y^2}\,dy = 0.$

37. $\sin y . \log \text{tang}\, x . dx + \cos x \sin x \cos y\, dy = \sin y . \log \text{coséc}\, y . dx.$

[Poser $u = \text{tang}\, x$, $v = \text{coséc}\, y$].

38. $\left(e^x - \frac{2}{x^2 - y^2}\right) y\, dx + \left(e^x + \frac{2x}{x^2 - y^2}\right) dy = 0.$

39. $(x^2 y^2 - a^2 y^2 + a^2 x^2 - a^4)\, dx + b x^2 y\, dy = 0.$

40. $\int xy\, dx = \frac{x}{n} \int y\, dx.$

41. $\int xy^2\, dx = \frac{2}{3} x \int y^2\, dx.$

V. — Équations homogènes.

1. $(x - y)\, dy = (x + y)\, dx.$

2. $y\, dy + (2y - 3x)\, dx = 0.$

3. $S_t = x + y.$

4. $(ny + x)\, dx + (n - 1) y\, dy = 0.$

5. $x\, dx + y\, dy = my\, dx.$ $\left[m \gtreqless 2\right].$

6. $(x^2 y + y^3)\, dx = 3xy^2\, dy.$

7. $y^2\, dx + x^2\, dy = xy\, dy.$

8. $xy\, dy - y^2\, dx = (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}}\, dx.$

9. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$

10. $(xy + y^2)\, dx + (xy - x^2)\, dy = 0.$

11. $x^2\, dy - (xy + y^2)\, dx = 0.$

12. $y\, dy + (x + 2y)\, dx = 0.$

13. $(y + \sqrt{x^2 - y^2})\, dx - x\, dy = 0.$

14. $y^2\, dx + (xy + x^2)\, dy = 0.$

15. $x^2 y\, dx - (x^3 + y^3)\, dy = 0.$

16. $x\, dy - y\, dx = dx \sqrt{x^2 \pm y^2}.$

17. $(3xy^2 + 2x^3)\,dx + y^3\,dy = 0.$

18. $(x^2 + xy + y^2)\,dx = x^2\,dy.$

19. $(x^3 + y^3)\,dx + (xy\,dx - x^2\,dy)\sqrt{x^2 - y^2} - xy^2\,dy = 0.$

20. $(4ax^3 + 3bx^2y + y^3)\,dx + (bx^3 + 3xy^2)\,dy = 0.$

21. $(3x^2 + 6xy + 3y^2)\,dx + (2x^2 + 3xy)\,dy = 0.$

22. $y^3\,dx + (xy^2 + bx^3)\,dy = 0.$

23. $(x^2y + y^3)\,dx - (x^3 + xy^2)\,dy = 0.$

24. $(3xy + 2x^2)\,dy + (2y^2 + 3xy)\,dx = 0.$

25. $(2x^4 + 9y^4)\,dy + 4x^3y\,dx = 0.$

26. $(8x^3 - 10xy^2)\,dy + (7x^2y - 5y^3)\,dx = 0.$

27. $x\,dx + y\,dy = m(x\,dy - y\,dx).$

28. $dy = (a + bx + cy)\,dx.$ $[bx + cy = z].$

29. $(bx^m - b'y^n)\dfrac{dy}{y} = (a'y^n - ax^m)\dfrac{dx}{x}\cdot$

30. $dy + b^2y^2\,dx = a^2x^m\,dx.$

31. $(6x^2 - 4xy + 2y^2 - 4x + 4y + 2)\,dy + (3x^2 + 5y^2 + 10y + 5)\,dx = 0$
[$x = \alpha u + \beta v + \gamma$, $y = \alpha' u + \beta' v + \gamma'$; ramener à l'homogénéité].

32. $\sqrt{y}.dx + (\sqrt{y} - \sqrt{x})\,dy = 0.$

33. $x\,dy - y\,dx = y\log\left(\dfrac{y}{x}\right)dx.$

34. $xy' - y = y\log\dfrac{y}{x}\cdot$

35. $\int y\,dx = \dfrac{y^3}{x}\cdot$

36. $(x^3 - xy^2)\,dy = -y^3\,dx.$

37. $(x^4 + xy^3)\,dy = y^4\,dx.$

38. $y\,dx = \dfrac{x^2 + xy}{x - y}\,dy.$

39. $a(x\,dy - y\,dx) = dx\sqrt{x^2 + y^2}.$

40. $(x^3 + y^3)\,dx + (xy\,dx - x^2\,dy)\sqrt{x^2 - y^2} - xy^2\,dy = 0.$

41. $dy = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

42. $(xy + y^2)\,dx + ax^2\,dy = 0$.

43. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{(xy - x^2)\sqrt{y^2 - x^2} - x^2 y}{(y^2 - xy)\sqrt{y^2 - x^2} - xy^2}$.

44. $ax\,dy + dx\sqrt{x^2 + y^2} = 0$.
(Poser $x = y\sqrt{u^2 - 1}$).

45. $(x^2 + xy - 2y^2)\,dx + (y^2 - 3x^2)\,dy = 0$.

46. $2xy\,dx + x^2\,dy - 6x^3\,dx + 12y^3\,dy = 0$.

47. $6x^2y\,dx + 2x^3\,dy + 6y\,dy - 8x\,dx = 0$.

48. $x^2y\,dx + y^3\,dx = 3xy^2\,dy$.

49. $x^2y\,dx - y^3\,dy = x^3\,dx$.

50. $x^3\,dy - x^2y\,dx + y^3\,dx - xy^2\,dy = 0$.

51. $(x^2 - 2y^2)\,dy + (x^2 + 2xy)\,dx = 0$.

52. $(1 + x - 2y)\,dx + (1 - x)\,dy = 0$.

53. $(7x - 3y - 7)\,dx + (3x - 7y - 3)\,dy = 0$.

54. $\left(by^2 + \dfrac{a}{x^2}\right)dx + dy = 0$. $\left[y = \dfrac{1}{z}\right]$.

55. Étant donnée l'équation $dy + ax^m y^n\,dx + bx^\mu y^\nu\,dx = 0$, chercher la relation qui doit exister entre les exposants m, n, μ, ν pour que l'équation puisse être rendue homogène en posant $y = z^r$ et choisissant convenablement r. — *Exemples :*

1° $(2x^3y^3 - 4x^5y^5 + 1)\,dx = 6x^7y^5\,dy$;

2° $\left(3x^2y^2 + \dfrac{1}{x^3y^3} - 5\right)dx = -6x^4y^2\,dy$;

3° $(1 - 9x^2y^2 + 3x^8y^8)\,dx = \dfrac{7\,dy}{x^3y^5}$;

4° $axy^3\,dx + bx^{\frac{1}{2}}y^2\,dx + cx\,dy = 0$;

5° $x^{\frac{11}{6}}y^{\frac{1}{3}}\,dx - ax^3y^{-1}\,dy - bx^2y\,dy = 0$;

6° Application à l'équation de Riccati
$dy + ay^2\,dx + bx^m\,dx = 0$.

56. $y' = f(x)\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$.

(Poser $y = tx$).

Exemple : $x^2y' - xy = (x^3 + 1)y^2$.

VI. — Équations linéaires du premier ordre.

1. $(1 + x - 2y)dx + (1 - x)dy = 0$.

2. $y' = a + bx + cy$.

3. $y' + \frac{ny}{x} = \frac{a}{x^2}$.

4. $y' + x^2y = x^3$.

5. $x^{\frac{1}{2}}y + x^3y' = x^{\frac{5}{4}}$.

6. $y' + y\cos x = \sin x \cos x$.

7. $y' - y = e^x$.

8. $y' + 2xy = 2ax^3y^3$.

9. $dy - dx + y\,dx - x\,dy = xy\,dx$.

10. $(dy - a\,dx)\sqrt{1 + x^2} + ny\,dx = 0$.

11. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^5 x - y - \cos^7 x}{\frac{1}{2}\sin 2x}$.

12. $(1 \pm x^2)dy \mp xy\,dx = a\,dx$.

13. $dy + by\,dx = ax^n dx$.

14. $dy + \frac{ny\,dx}{\sqrt{1 + x^2}} = a\,dx$.

15. $y' + \frac{ay}{1 - x^2} = \frac{1 + x}{(1 - x)^3}$.

16. $y'\cos y + \sin y = x$.

17. $\frac{y\,dy}{\sqrt{1 + y^2}} - dx\sqrt{1 + y^2} = \cos ax.dx$.

18. $y' + \frac{y}{1 + x} + x^2 = 0$.

19. $y - xy' = \frac{x^2}{a} - by$. (Cas de $b = 1$).

20. $dy + y\,dx = e^x\,dx$.

21. $(1 - x^2)y' + xy = a$.

22. $y = \int_0^\infty e^{-x^2} \sin ax\,dx$, d'où $\frac{dy}{da} + \frac{1}{2}ay = \frac{1}{2}$; calculer y au moyen de cette dernière équation.

23. $yy' - \frac{ay^2}{x} = -\frac{b}{x^2}$.

24. $(y - x)\,dy = \frac{n(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx$. $[x = \operatorname{tang} u,\ y = \operatorname{tang} v]$.

25. $(1 + x^3)\,dx = dy + y\,dx$

26. $(1 + x^2)y' - xy = n$.

27. $dy\sqrt{1 + x^2} + ny\,dx = a\,dx$.

28. $dy + \frac{1 - 2x}{x^2}y\,dx = dx$.

29. $dy - by\,dx = a \sin x\,dx$.

30. $\frac{dy}{\sqrt{y}} + \frac{x}{1 - x^2}\sqrt{y}.dx = x\,dx$.

31. $y' = a \sin x + by$.

32. $dy + y \cot(\alpha + x)\,dx = \operatorname{séc}(\alpha + x)\,dx$.

33. $dy = \frac{xy^3\,dx}{a^2 + xy}$. $[xy = z]$.

34. $x - S_t = \varphi(x)$, (S_t étant la sous-tangente).

Exemples : $\varphi(x) = 1^\circ\ \frac{1}{2}(a + x)$; $2^\circ\ \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{x}\right)\right]^{-1}$; $3^\circ\ \sqrt{ax}$; $4^\circ\ \frac{x^2}{a}$.

35. Transformer l'équation

$$y' + Py = Q$$

en faisant $y - \frac{Q}{P} = z$. Applications aux exemples précédents.

36. Sommer la série

$$y = 1 + \frac{1}{a+1}x + \ldots + \frac{1.2\ldots n}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}x^n + \ldots,$$

au moyen de la relation

$$\frac{1}{x^a} d(x^a y) = \left(\frac{a}{x} + y\right) dx + x\,dy.$$

37. $y' \cos y + \sin y = x.$

38. $y' + y = xy^3.$

39. $xy^2 dy + y^3 dx = \dfrac{a\,dx}{x}\cdot$

40. $y' + y = x\sqrt{y}.$

41. $y' + y = \dfrac{x}{y}\cdot$

42. $(1 + x) y' - \dfrac{xy}{1 - x} + \dfrac{x^2}{y} = 0.$

43. $y' + \dfrac{a}{x} y + b y^2 = 0.$

44. $(xy^2 - y)\,dx + 2x\,dy = 0.$

45. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3 \sin x - y \cos^3 x}{\sin x - \sin^3 x}\cdot$

46. $y' = x^3 y^3 - xy.$

47. Trouver une courbe dont l'aire de base $x - a$, c'est-à-dire $\int_a^x y\,dx$, soit égale à l'une des fonctions

$$\frac{xy}{m},\quad \frac{1}{3} x(y - b),\quad x\sqrt{by},\quad x\varphi(y).$$

48. Connaissant une intégrale particulière $y = y_1$ de l'équation

$$X_0 y' + X_1 y = X_2 y^2 + X_3,$$

trouver l'intégrale générale. (Poser $y = y_1 + z$).

VII. — Addition des transcendantes.

1. $\dfrac{dx}{a + 2bx + cx^2} + \dfrac{dy}{a + 2by + cy^2} = 0.$

2. $\dfrac{dx}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} + \dfrac{dy}{\sqrt{a + 2by + cy^2}} = 0.$

3. $\dfrac{dx}{\sqrt{x(1 - x)(1 - k^2 x)}} + \dfrac{dy}{\sqrt{y(1 - y)(1 - k^2 y)}} = 0.$

4. $\dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} + \dfrac{dy}{\sqrt{1 - y^4}} = 0.$

VIII. — Méthode du multiplicateur.

(*Voir* les exemples du n° V).

1. $x\,dy - 2y\,dx = a\,dx$.

2. $y\,dy + (x - ny)\,dx = 0$.

3. $(1 - a^2y^2)\,dx + a^2xy\,dy = 0$.

4. $x\,dx + y\,dy = ay\,dx$.

5. $x\,dy - y\,dx = dx\sqrt{x^2 + y^2}$.

6. $y'\sqrt{1 + x^2} + 2y = 6\sqrt{1 + x^2}$.

7. $(2\alpha y + 3\beta xy^2)\,dx + (3\alpha x + 4\beta x^2y)\,dy$.
(Trouver un multiplicateur de la forme $x^m y^n$).

8. $\frac{a\,dx}{x} + \frac{b\,dy}{y} = \frac{cx^m\,dx}{y^b}$. [Multiplier par $x^a y^b$].

9. $ax^2y^n\,dy = 2x\,dy - y\,dx$.

10. $a(x\,dy + 2y\,dx) = xy\,dy$.

11. $\frac{dx}{x} + \frac{y^2\,dx}{x^3} - \frac{y\,dy}{x^2} + \frac{dy}{2y} + \frac{y\,dx - x\,dy}{x^3}\sqrt{x^2 + y^2} = 0$.

12. $(ax^2 + xy^2)\,dy = y^3\,dx$.

13. $dx + (x + y^2)\,dy = 0$.
(Multiplicateur $= e^y$).

14. $(2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3)\,dx + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3)\,dy = 0$.

15. Déterminer le cas où le multiplicateur d'une équation $M\,dx + N\,dy = 0$ est de la forme $f(x)\,F(y)$. — L'équation aux dérivées partielles du multiplicateur est alors de la forme

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} + M\chi(y) - N\varphi(x) = 0.$$

Application à l'équation

$$ax^my^n\,dy + (bx^{m'}y^{n'} + cx^{m''}y^{n''})\,dx = 0.$$

16. $\left(y - \frac{ay}{x} + x\right)dx + a\,dy = 0$. $\left[\mu = \frac{1}{y + x}\right]$.

17. Si l'équation aux dérivées partielles du multiplicateur μ de l'équation $M\,dx + N\,dy = 0$ est vérifiée par $\mu =$ une fonction de x seul ou $=$ une

fonction de y seul, on a dans le premier cas

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = f(x),$$

dans le second

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = f(y).$$

Application aux équations

(1) $(1 + x - 2y)\,dx + (1 - x)\,dy = 0.$

(2) $(xy^2 - y)\,dx + 2x\,dy = 0.$

18. $y^2\,dx + (xy - 1)\,dy = 0.$

Chercher le multiplicateur en le supposant une fonction symétrique de x et de y. Alors, si $M\,dx + N\,dy$ est le premier membre de l'équation, et $M_1\,dy + N_1\,dx$ ce que devient ce premier membre par l'échange mutuel de x et de y, chacune de ces expressions, multipliée par μ, est une différentielle exacte. En exprimant que la condition du n° 831 est vérifiée dans ces deux cas, on en conclut les valeurs de $\frac{\partial \mu}{\partial x}$, $\frac{\partial \mu}{\partial y}$, et par suite celle de $\frac{d\mu}{\mu}$. On trouvera ici $\frac{d\mu}{\mu} = -d(xy)$.

19. $(x^2y^2 + y)\,dx + (x^2y^2 - x)\,dy = 0.$

20. Déterminer le multiplicateur quand il est de l'une des formes $\varphi(x + y)$, $\varphi(xy)$.

Exemples :

(1) $(x^2 + x^2y + 2xy - y^2 - y^3)\,dx + (y^2 + xy^2 + 2xy - x^2 - x^3)\,dy = 0.$

(2) $(2x^3y^2 - y)\,dx + (2x^2y^3 - x)\,dy = 0.$

21. $x(x\,dy - y\,dx) - y\,dy + dx = 0.$

22. $a^2y\,dx = y^3\,dy + by^2\,dx + a^2x\,dy.$

23. $my\,dx + x\,dy = ay^n\,dy.$

24. $my\,dx + nx\,dy = Y\,dy.$

25. $ax^{n-1}y\,dx + bx^n\,dy = Y\,dy.$

26. $ax\,dy + 2ay\,dx = xy\,dy.$

27. $3x^3\,dy - 2axy\,dy = 3x^2y\,dx - ay^2\,dx.$ $[y^2 = tx]$.

28. $xy^2\,dx - xy^2\,dy = b^2y\,dx - 2b^2x\,dy.$ $\left[y = \frac{tx}{b},\ x = \frac{b^2u}{t^2}\right]$.

IX. — Équations différentielles du premier ordre et d'un degré supérieur au premier par rapport à y'. — Solutions singulières.

1. $s = ax + by$.

2. $yy'^2 + 2xy' = y$.

3. $y'^2 + ax - by = 0$.

4. $y'^2 + xy' + x^2 = 0$.

5. $x(1 + y'^2) = 1$.

6. $xy' = \sqrt{1 + y'^2}$.

7. $y = a\sqrt{1 + y'^2}$.

8. $y - xy' = nx\sqrt{1 + y'^2}$.

9. $y\sqrt{1 + y'^2} = y'$.

10. $3xy'^2 - 6xy' + x + 2y = 0$.

11. $(xy' - y)(xy' - 2y) + x^3 = 0$.

12. $(yy' + ax)(xy' - y) + by' = 0$.

13. $4xyy' + y'^3 - 8y^2 = 0$.

14. $x\,dx + a\,dy = b\,ds$.

15. $y^3 dx^3 + dy^3 = ay\,dx^2 dy$.

16. Trouver une courbe telle que le produit des deux coordonnées x, y soit la moitié du carré de l'arc.

17. $y^2 dx - xy\,dy = Y\sqrt{y^2 dx^2 - 2xy\,dx\,dy + y^2 dy^2}$.

18. $y - 2xy' = 2y' f(yy')$.

19. $y\sqrt{1 + y'^2} = f(x + yy')$.

20. $y'^3 + axy' + x^3 = 0$. $[y' = tx]$.

21. $y\,dx - x\,dy = nx\,ds$. [Coordonnées polaires].

22. $y\,dx - x\,dy = a\,ds$.

23. $L\,dx^2 + 2M\,dx\,dy + N\,dy^2 = 0$, L, M, N étant des fonctions homogènes du même degré de x et de y. — *Exemple :*

$$ay^2 dx^2 + 2bxy\,dx\,dy + cx^2 dy^2 = 0.$$

24. $y'^3 + y^3 y' + y^4 = 0$. $[y' = ty]$.

25. $y^5 y'^5 + y^2 y'^3 + 1 = 0$. $\left[y' = \frac{1}{ty}\right]$.

26. $y'^3 - axy' + x^3 = 0$. $[y' = tx]$.

27. $y'^5 + y^9 y' + y^7 y'^2 + y^{11} = 0$.

28. $y'^2 = ax^2 + by$.

29. $y = xy'^2 + 2y'$.

30. $y^3 + axy' + x^3 = 0$. $[y' = xu]$.

31. $(y' - ax)^2 + x(y' - ax) - \left(y - \frac{1}{2}ax^2\right) = a^2$. [Par différentiation].

32. $xyy'^2 + (x^2 - y^2)y' - xy = 0$.

33. $ayy'^2 + (2x - b)y' - y = 0$. $\left[y' = \frac{u'}{2y}\right]$.

34. $y'^3 - (a + 2bx + 3cx^2)y'^2 + (6bcx^3 + 3acx^2 + 2abx)y' - 6abcx^3 = 0$.

35. $\left(y'^2 - \frac{1}{a^2 - x^2}\right)\left(y' - \sqrt{\frac{y}{x}}\right) = 0$.

36. $y'^3 - (x^2 + xy + y^2)y'^2 + (x^3 y + x^2 y^2 + xy^3)y' - x^3 y^3 = 0$.

37. $(a^2 - x^2)y'^3 + bx(a^2 - x^2)y'^2 - y' - bx = 0$.

38. $\left(1 - y^2 - \frac{y^4}{x^2}\right)y'^2 - \frac{2y}{x}y' + \frac{y^2}{x} = 0$.

39. $y = \frac{1}{4}(x^2 + y'^2)$.

40. $y + (a - x)y' = n\int ds$.

41. $y = xy' + ax^2 y'^2 + bx^3 y'^3 + \ldots$. $[xy' = u]$.

42. $(1 - y'^2)xy = (x^2 - y^2 - a^2)y'$. $[yy' = xu]$.

43. $xy' - y = X\sqrt{y'^2 - \frac{2y}{x}y' + 1}$. $[y = xu]$.

44. $y\,dx = x\,ds$.

45. $\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2x}} + \sqrt{\frac{x}{2y}}$.

46. $(xy' - 2y)^2 = y^2 + \frac{x^4}{a^2}$. $\left[y^2 + \frac{x^4}{a^2} = z^2\right]$.

47. $y = xy' + \frac{a}{y'}$.

48. $y = xy' - y'^2$.

49. $y = xy' + \arcsin y'$.

50. $y = xy' + a\sqrt{1 \pm y'^2}$. [Cas de $a = 1$].

51. $y = xy' + \sqrt{a^2 y'^2 + b^2}$.

52. $y = xy' + \frac{a(1 + y'^2)}{y'}$.

53. $y = xy' + y' - y'^2$.

54. $y = xy' + a\sqrt[3]{1 - y'^3}$.

55. $y = xy' - \frac{ay'}{\sqrt{1 - y'^2}}$.

56. $y = x + y'^2$.

57. $y'^2 + 4y + 4 = 0$.

58. $\frac{x\,dy - y\,dx}{ds} = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$. $\left[x = tu,\ y = t\sqrt{1 - u^2}\right]$.

59. Solutions singulières des équations

(1) $(x^2 - a^2)y' = xy \pm \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$.

(2) $yy' = x \pm \sqrt{2x^2 - 2y^2}$.

(3) $y' = 1 \pm \sqrt{\frac{2x - 2y}{a}}$.

(4) $4yy' = x + a \pm \sqrt{(x + a)^2 - 4y^2}$.

(5) $2yy' = a \pm 2\sqrt{ax - y^2}$.

(6) $ay' = \pm\sqrt{ab - ay}$.

(7) $x^2 y'^2 - 2xyy' + x^2 - x^2 y^2 - x^4 = 0$.

(8) $(1 + y'^2)(y - xy')^2 = a^2 y'^2$.

60. $y^2 y'^2 - 2xyy' + ax + by = 0$.

Examiner la solution $x^2 = ax + by$.

61. $x\,ds = a\,dy$.

62. $x = ay' + b\sqrt{1 + y'^2}$.

63. $x\,dy - y\,dx = x\,ds.$

64. $ds = \dfrac{ax\,dx + y\,dy}{\sqrt{ax^2 + y^2}}.$

65. $y'^2 - xy' + y = 0.$

66. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$

67. $xy'^2 + yy' + a = 0.$

68. $y^4 y'^2 - 2xy^3 y'^3 = a.$

$\left(\text{Résoudre par rapport à } x, \text{ différentier, } dx = \dfrac{dy}{y'}, \text{ etc.}\right).$

69. $y'^2 + xy' - y - a(4xy' + x^2) + 4a^2(1 + x^2) = 0.$

70. $y - 2xy' - y'^2 = 0.$

71. $x^2 + y^2 - 2x(x + yy') + \dfrac{1}{a^2}(x + yy')^2 + b = 0.$

72. $s^2 = y^2 + nx^2.$

73. $y\,dx - \dfrac{3}{2}x\,dy = a\,ds.$

74. $y\,dx - x\,dy = a\,ds.$

75. $y'^2 = 2x^2 + 6y.$

76. $x\,dy + y\,dx = ds\sqrt{2xy}.$

77. $\dfrac{ds}{dx}\sqrt{ax + y^2} = ax + yy'.$

78. $yy' + nx = \dfrac{ds}{dx}\sqrt{y^2 + nx^2}.$

79. $y - xy' = nx\dfrac{ds}{dx}.$ $[y = tx].$

80. $y\dfrac{ds}{dx} = n(x + yy').$

81. $x^2y'^2 - 2xyy' + y^2 - x^2y^2 - x^4 = 0.$

82. $x\,dy \pm y\,dx = ds\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}.$

83. $xy'^2 + (a - x - y)y' + y = 0.$

84. $y - xy' + x - \dfrac{y}{y'} = a.$

85. $(y - xy')\left(x - \dfrac{y}{y'}\right) = a^2.$

86. $(y - xy')^2 + \left(x - \frac{y}{y'}\right)^2 = a^2.$

87. $y = (1 + y')x + y'^2.$

88. $x^2(dx^2 - dy^2) = a^2 dy^2.$

89. $(x^2 - 2y^2)y'^2 - 4xyy' - x^2 = 0.$

90. $y' = 2(y - x) - 1 + b\sqrt{y - x - 1}.$

91. $(\sqrt{x - y} - \sqrt{x + y})y' + \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = 0.$

92. $y + (y - x)y' + (a - x)y'^2 = 0.$

93. $(xy' - y)(xy' - 2y) + x^2 = 0.$

94. $a\sqrt{y^2 dy^2 - 2xy\,dx\,dy + y^2 dx^2} = xy\,dy - y^2 dx.$
(Poser $x = ty$).

95. $y'^3 - 6y'^2 + 11y' - 6 = 0.$

96. $a^2 y'^3 + a^2 bxy'^2 - y' = x^2 y'^3 + bx^3 y'^2 + bx.$

97. $y'^2 - 2\frac{yy'}{x} - 1 = 0.$

98. $(x^2 - 2y^2)y'^2 - 4xyy' - x^2 = 0.$

99. $(x^2 - a^2)y'^2 - 2xyy' - x^2 = 0.$

100. $x^2 dy^2 + x\,dx\,dy - dx^2 = 0.$

101. $y = xy'^2 + 2y'.$

102. $y = mxy' + n\sqrt[3]{1 + y'^3}.$

103. $y + (a - x)y' = n\int\sqrt{dx^2 + dy^2}.$

104. $yy'^2 + 2xy' - y = 0.$

105. $ayy'^2 + (2x - b)y' - y = 0.$

106. $xy'^2 - yy' + a = 0.$

107. $y + (x - \text{arc tang}\, y')y' - 1 = 0.$

108. $x\,dy \pm y\,dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$
(Poser $x = \sqrt{1 + t^2} \mp ty$).

109. Solutions singulières déduites de l'intégrale générale :

(1) $y = Cx + \sqrt{b^2 - a^2C^2}$.

(2) $C^2 - 2Cy + a^2 - x^2 = 0$.

(3) $C^2 + 2Cy - y^2 - x^2 = 0$.

(4) $C^2 + 2Cy - x^2 = 0$.

110. Les solutions données des équations différentielles suivantes sont-elles des intégrales particulières ou des solutions singulières?

(1) $dy + (x^2 - y^2 - 1)\,dx = 0$, solution $y = x$.

(2) $dy + \left(\sqrt{y - x} - 1\right)dx = 0$, solution $y = x$.

Cette équation a-t-elle une solution singulière?

(3) Nature de la solution $x^2 + y^2 = a^2$ de l'équation.

$$y' = \frac{x}{(x^2 + y^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} - y}.$$

111. $y'^2 - 4xy' + 4y = 0$. Caractère de la solution $y' = 2x$.

112. $1 + y'^2 = a^2(y - xy')^2$. Caractère de la solution

$$y' + a^2(xy - x^2y') = 0.$$

113. Démontrer qu'une solution singulière rend en général infini le facteur d'intégration.

X. — Exercices divers.

1. $y^2 + (1 - xy)y' = 0$.

2. $y^{m-1}y' + Xy^m = X_1$.

3. $x^2y' + xy + e^{xy} = a$. $[y = uv]$.

4. $6x^4y^2dy = (4x^2y^3 + 1)\,dx$.

5. Trouver une courbe dont l'aire $\int y\,dx$ ait un accroissement proportionnel à celui du triangle formé par l'ordonnée, la normale et la sous-normale. — Problème analogue pour le cas des coordonnées polaires.

6. Trouver une courbe telle que l'aire comprise entre la tangente, l'ordonnée et l'axe Oy soit proportionnelle au carré de l'ordonnée.

7. Trouver une courbe dont la sous-normale yy' soit proportionnelle au carré du rayon vecteur.

8. Trajectoires orthogonales des courbes :

1° $y^2(C - x) = x^3$.

2° $r = C\sin p$.

9. Courbe dont l'extrémité de la sous-tangente polaire a pour lieu une droite.

10. Courbe dans laquelle l'abscisse de l'intersection de la normale avec Ox est proportionnelle au rayon vecteur.

11. Trajectoires orthogonales des ellipses confocales.

12. Trouver une courbe telle que sa tangente rencontre Oy au même point que la perpendiculaire abaissée du pied de l'ordonnée sur le rayon vecteur.

13. $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$.

14. $(4-3xy^2)xy' + (2+5y^2)y = 0$. [839].

15. $(4xy^2 - 3x^3)y' + 2y^3 - 5x^2y = 0$.

16. $(3x^2 - 4y)y' - 3x^2y + \frac{4y^2}{x} = 0$.

17. $(x^2y^2 + ax)dy = (bx^2y^2 + ay)dx$.

18. $y' = \frac{1+xy+y^2}{1+xy+x^2}$.

19. $a(x\,dy - y\,dx) = dy\sqrt{x^2+y^2}$.

20. $(y-x)\sqrt{1+x^2}.dy = n(1+y^2)^{\frac{3}{2}}dx$. $\left[y = \frac{x-u}{1+xu}\right]$.

21. $a(x\,dy - y\,dx) = (x\,dx + y\,dy)\sqrt{x^2+y^2-a^2}$.
[Coordonnées polaires].

22. $a^2dy = (a^2+x^2-y^2)dx$. $\left[y = x + \frac{1}{z}\right]$.

23. $(1-xy)dy + (y^2+ax)dx = 0$. $\left[y = \frac{z-ax^2}{1+xz}\right]$.

24. $2xy\,dx + (y^2 - x^2)dy = 0$.

25. $\operatorname{tang} x \cos y\, dy = \sin y\, dx + dx\sqrt{2a\sin x \sin y + \sin^2 y}$.

26. $dy + by^2dx + \frac{a\,dx}{x^4} = 0$. $\left[y = \frac{u}{x^2} + \frac{1}{bx}\right]$.

27. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x^2}{x^4+1}\,\frac{y}{x-y}$. $[y = tx]$.

28. $(y-ax)y' - ay - b^2x = 0$.

29. $\frac{dx}{dy} = \frac{x\sqrt{a^2-x^2-y^2} - any}{anx + y\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$.
(Transformer en coordonnées polaires).

30. $x\,dy = y \log y (\log x)^2 [1 + (\log y)^2 \log x]\,dx$.
[$\log x = u$, $\log y = v^2$].

31. $x + y'\left(y - \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}\right) = 0$.

32. $y'^2 + 4xyy' - 8y^2 = 0$. [$y = e^z$].

33. Courbe dont la tangente (ou la normale) est à une distance constante d'un point donné.

35. Trouver une courbe telle que les distances de sa tangente (ou de sa normale) à deux points fixes A, A' aient un produit, ou un rapport, ou une somme constants.

36. Trouver une courbe telle que sa tangente (ou sa normale) intercepte sur deux perpendiculaires fixes à l'axe des x deux segments dont le produit soit constant.

37. Courbe dont le rayon vecteur est une moyenne proportionnelle entre la sous-normale yy' et une constante donnée.

38. Trouver les courbes pour lesquelles on a l'une des relations

$$\begin{array}{llll} S_t = nx, & S_n = nx, & T = nx, & N = nx, \\ S_t = ny, & S_n = ny, & T = ny, & N = ny, \\ \dfrac{S_t}{y} = \dfrac{x-y}{a}, & \dfrac{S_n}{y} = \dfrac{x}{a}, & \dfrac{T}{y} = \dfrac{x}{a}, & \dfrac{N}{y} = \dfrac{x}{a}. \end{array}$$

39. Problèmes analogues pour les coordonnées polaires.

40. Courbe dont la tangente rencontre Ox à une distance de O égale au rayon vecteur OM.

41. Étant données une droite Ox et deux perpendiculaires à cette droite AP, BQ, trouver une courbe dont la tangente coupe ces deux perpendiculaires en deux points tels que l'une des quantités

$$\frac{AP}{BQ}, \quad AP + BQ, \quad AP^2 + BQ^2, \quad \frac{AQ^2}{AP}$$

soit constante.

42. On donne deux droites OA, OB, et l'on prend la bissectrice de leur angle pour axe des y. On demande de trouver une courbe telle que son ordonnée et sa tangente en chaque point rencontrent l'une OA, l'autre OB sur une même perpendiculaire à Oy.

43. Trouver une courbe dont l'arc soit proportionnel 1° au coefficient angulaire de la tangente, 2° à l'angle de la tangente avec Ox, 3° à l'abscisse de l'intersection de la tangente avec Ox, 4° à l'accroissement de la longueur de la tangente comprise entre Ox et le point de contact. — Questions analogues en coordonnées polaires.

44. Trouver une courbe telle que l'angle τ de la tangente avec Ox soit une fonction donnée de l'angle p du rayon vecteur avec le même axe.

45. Trouver une courbe telle que les rayons lumineux partant d'un point donné deviennent parallèles entre eux après la réflexion sur cette courbe.

46. La normale en un point M d'une courbe C coupant l'axe des x en N, le lieu des milieux P de MN est une parabole $Y^2 = 2kX$; équation de la courbe C dans la supposition qu'elle passe par l'origine des coordonnées.

47. Équation différentielle de la courbe pour laquelle l'aire comprise entre l'axe des x, deux ordonnées et la courbe est égale au carré de l'arc correspondant.

48. Trouver la courbe dont la normale et la sous-normale ont une somme constante.

49. Trouver la courbe pour laquelle le carré de la tangente est proportionnel à la sous-tangente.

50. Courbe dont la podaire par rapport à un point A est un cercle de centre B.

51. Trouver la courbe dont la caustique soit une droite parallèle à l'un des axes coordonnés, pour des rayons perpendiculaires à l'axe des x.

52. La normale MN à une courbe rencontrant l'axe Ox en N, déterminer la courbe de manière que $MN = \sqrt{ON \times a}$.

53. Courbe telle que l'aire comprise entre la tangente, l'ordonnée et les axes Ox, Oy soit proportionnelle au carré de l'ordonnée.

54. Étant donnée une série d'ellipses de même grand axe $AB = 2a$, trouver une courbe qui coupe respectivement ces ellipses en des points M, M′, ... tels que toutes les aires AMP, AM′P′, ... comprises entre les arcs AM, AM′, ... et les ordonnées MP, M′P′, ... soient égales entre elles.

55. Un angle A constant se meut de manière que ses côtés touchent une courbe C, et que son sommet décrive une courbe C′. — Étant donnée l'une des deux courbes C, C′, trouver l'autre. — *Exemples :*

1° C est une parabole $y^2 = ax$, $A = \frac{\pi}{2}$;

2° C est une ellipse ou une hyperbole, $A = \frac{\pi}{2}$;

3° C′ est une droite;

4° C′ est une parabole.

XI. — Équations différentielles d'ordre quelconque.

1. $\sin^4 x \dfrac{d^3y}{dx^3} = \sin 2x.$

2. $ay'' = y'.$

3. $x^2y'' = a.$

4. $2\,dx\,dy = (a - y)\,d^2x.$

5. $y''' = y''^2.$

6. $y''' = \dfrac{1}{y'^3}\cdot$

7. $\sin x \dfrac{d^2y}{dx^2} - \cos x \dfrac{dy}{dx} = \sin x \operatorname{tang} x \dfrac{dy}{dx}\cdot$

8. $y'' = \sqrt{1 + y'^2}.$

9. $y'' = (1 + y'^2)^2.$

10. $y'' + ay'^2 = 0.$

11. $y'^2y'' + xy'' = y'.$

12. $xy'' = y' - \dfrac{y}{x}\cdot$

13. $xy'' + y' = 0.$

14. $(1 + x^2)y'' + 1 + y'^2 = 0.$

15. $y'' + (e^x - 1)y' = e^{2x}.$

16. $y''' = ay''.$

17. $y'' = \dfrac{ds}{dx}\cdot$

18. $y'' = a + by'^2.$

19. $ad^2y\,d^3y = \sqrt{dx^4 + (d^2y)^2}.dx^3.$

20. $y''\sqrt{ay} = 1.$

21. $x = \sqrt{a\rho}.$

22. $y^{\text{IV}} = a\sqrt{y'''}.$

23. $y^{\text{IV}}y''^3 + a = 0.$

24. $y^{\text{IV}} - a^2 y'' = 0.$

25. $y'' = a - by.$

26. $xy'' = (y-1)y'.$

27. $y'' = \dfrac{a}{b+y} - c.$

28. $y'' = \dfrac{a}{(b-y)^2}.$

29. $y'' + ay'^2 + b = 0.$

30. $y''' = ay'' \dfrac{ds}{dx}.$

31. $y'' \sqrt{ay} = 1.$

32. $\rho = \dfrac{a^2}{2x}.$

33. $y'' + Y = 0.$

34. $y'' + Yy'^2 = 0.$

35. $y'' + Yy' = 0.$

36. $y'' + Xy'^2 = 0.$

37. $y'' + Xy' = 0.$

38. $d^2y + ady\sqrt{dx^2 + dy^2} = 0.$

39. $ayy'' + by'^2 = \dfrac{yy'}{\sqrt{c^2 + x^2}}.$

40. $xyy'' = yy' + xy'^2 - \dfrac{bxy'^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

41. $y'' = x^2 y^2 y'^2.$

42. $7y'' = 9xyy'^4.$

43. $3y'' = 10y^2 y'^2.$

44. $2xy'' = y'.$

45. $\dfrac{a^2}{4y^2} + yy'' = 0.$

46. $y'' = \dfrac{a}{y'}.$

47. $y'^2 + 2yy'' = 0.$

48. $y'' = \dfrac{a}{(b-y)^2}$.

49. Trouver une courbe dont le rayon de courbure soit proportionnel à la normale.

50. $ay''y''' = \sqrt{1+y''^2}$.

51. $y'' - ay = 0$.

52. $y'' - ayy' = 0$.

53. Expressions différentielles à intégrer :

(1) $y + (x+2y)y' + y'^2 + 2xy'y''$.

(2) $\dfrac{xy'''}{xy''-y'}$.

(3) $\dfrac{(yy'+x)y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(4) $\left(2y+\dfrac{1}{y}\right)d^3y + \left(6-\dfrac{3}{y^2}\right)dy\,d^2y + \dfrac{2\,dy^3}{x^3}$.

(5) $x^2d^3x + 2x^3dx\,d^2x + (3x^2-1)dx^3$.

(6) $\begin{cases} (ax^2-6xy+3by^2)d^2y + (6x+2ay)ax^2 \\ \qquad + (4ax-12y)dx\,dy + (6by-6x)dy^2. \end{cases}$

(7) $\int\int(x^3d^2y + 6xy\,dx^2 + 6x^2dx\,dy)$.

(8) $ax^3d^3x + (3ax^2+2bx^2)dx\,d^2x + 2bx\,dx^3$.

(9) $(a+2bx+3cx^2)d^2x + (2b+6cx)dx^2$.

(10) $\begin{cases} ax^2y\,d^2x + b^2x^3y^2d^2y + 2axy\,dx^2 + 2b^2x^3y\,dy^2 \\ \qquad + (ax^2+3b^2x^2y^2)dx\,dy. \end{cases}$

(11) $b^2x^3y^2d^2y + 2axy\,dx^2 + 2b^2x^3y\,dy^2 + (ax^2+3b^2x^2y^2)dx\,dy$.

(12) $8y\,dx^2dy + (4xy+2y)dx\,d^2y + (2+4x)dx\,dy^2 + 3x\,dy\,d^2y + xy\,d^3y$.

(13) $y^2d^2x + (2+3x^2y)y\,dx\,dy + 2x^3y\,dy^2 + x^3y^2d^2y$.

(14) $y\,d^2x - dx\,dy + y^2d^2y$.

54. $(3x-x^2)y'' + (6-4x)y' - 2y = 0$.

55. $y + 3xy' + 2yy'^2 + (x^2+2y^2y')y'' = 0$.

56. $y''' + 6yy'y'' + 3y'^3 + 5xy' + 5y = 0$.

57. $3yy' + 2xy' + 2y - 12x = 0$.

58. $(3x-x^2)y'' + (6-4x)y' - 2y = 0$.

59. $10y'y'' - 2yy'' - 2y'^2 + \dfrac{1}{y} - \dfrac{xy'}{y} + 2 = 0$.

60. $2y^3y'' + y^2y'^2 - x^2 = 0$.

61. $xy\,d^2y + \beta\,dy^2 = \dfrac{y\,dx\,dy}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

62. $2y\,d^2y + 3\,dy^2 = \dfrac{4y\,dx\,dy}{5\sqrt{a^2+6x^2}}$.

63. $5y\,d^2y + 4\,dy^2 = \dfrac{4y\,dx\,dy}{x}$.

64. $ds\,dy = a\,d^2x$, pour ds constant. Transformer l'équation en prenant dx constant.

65. $ds^2\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dx^2}{a}\cos\dfrac{x}{b}$, pour dx constant. Transformer en prenant ds constant.

66. $y = Cx$ est-elle une solution particulière ou une solution singulière de l'équation $nx^2y'' = (y - xy')^2$?

67. $\rho = -\dfrac{x^2}{a}$.

68. $y'' = Y + by'^2$.

69. $(a + yy')y'' = y'(1 + y'^2)$.

70. $y'' + \dfrac{y'^3}{y} - \dfrac{y'}{x} = 0$.

71. $y'' + \dfrac{y - xy' - yy'^2 + xy'^3}{y^2 - x^2} = 0$.

72. $2x^3d^2y - x^2dy^2 + 2xy\,dx\,dy - y^2dx^2 = 0$.

73. $xy\,d^2y + x\,dy^2 + 2y\,dx\,dy = 0$.

74. $x^4d^2y = (x^3 + 2xy)\,dx\,dy - 4y^2dx^2$.

75. $ayy'' + by'^2 = \dfrac{yy'}{\sqrt{c^2+x^2}}$.

76. $yy'' + y'^2 + X = 0$.

77. $by'' = (a - x)(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$.

78. $y'' + Xy' + Yy'^2 = 0$. $[y' = ue^{-\int X\,dx}]$.

79. $n\dfrac{ds^3}{dx^3} = y''\sqrt{x^2+y^2}$.

80. $x^2y'y'' - xy' + y = 0$.

81. $x^2 d^2y + x\,dx^2 + y\,dy^2 = 0.$

82. $xy'' = y'.$

83. $x^2y'' = xy' + 3y.$

84. $ax^3d^2y = (x\,dy - y\,dx)^2.$

85. $x^2y'' = \sqrt{ax^2y'^2 + by^2}.$

86. $x^2y'' = ay + bxy'.$

87. $x^4y'' = x^3y' + 2xyy' - 4y^2.$

88. $y'^2 + 2y''y = 0.$

89. $1 + y'^2 + xy'y'' = ay''\sqrt{1 + y'^2}.$

90. $2(a^2y'^2 + x^2)y'' = xy'.$

91. $yy'' + y'^2 + f\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$

92. $yy'' + ny'^2 + n = 0.$

93. $\frac{ds^2}{dx^2} - 2yy'' = 3ay\frac{ds^3}{dx^3}.$

94. $y^2y''^2 + \frac{ds}{dx} = 0.$

95. $y''(yy' + a) = y'(1 + y'^2).$

96. $(1 + x^2)y'' + 1 + y'^2 = 0.$

97. $\frac{d^2y}{dx\,ds} = \frac{a}{x}.$

98. $a^2d^2y\sqrt{a^2 + x^2} + a^2dx\,dy = x^2dx^2.$

99. $2x\frac{ds^3}{dx^3} = a^2y''.$

100. $dx\,ds^2 + x\,dy\,d^2y = a\,ds\,d^2y.$

101. $x^2y'' = 2y.$

102. $(x^2 + y^2)^2y'' + a^2y = 0.$

103. $X\,dy^3 = dx^2dy - x\,dy\,d^2x + x\,dx\,d^2y.$
Supposer constants tour à tour dx, dy, $x\,dy$, $\frac{dx}{x}$.

104. $dx^2dy - dy^3 = a\,dx\,d^2y + x\,dx\,d^2x.$ [ds constant].

105. $ds\,dy^2 = a\,dx\,d^2x.$ [ds constant].

106. $a\,ds\,d^2y + y\,dy^2\,dx = 0$. [$ds$ constant].

107. $a\,ds\,d^2y + y\,dy^2\,dx = 0$. [$ds$ constant].

108. $\dfrac{x^2\,dx - a^2\,dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{x\,dy^2 + xy\,d^2y + y\,dy\,dx}{y\,dy}$, pour $y\,dx$ constant. Transformer l'équation en supposant dx constant.

109. $Y\,dy\,ds = a(2y\,d^2x + dx\,dy)$. [$ds$ constant].

110. $a\,ds\,d^2x = dy^3$. [ds constant].

111. $ds^2\,d^2y = X\,dx^4$. [ds constant].

112. $y'y''' + ay''^2 + by'^2y'' = 0$.

113. $\rho = f(y)$.

114. $(a^2y'^2 + x^2)y'' = nx^2y'$.

115. $dx^3\,dy - x\,ds^2\,d^2y = a\,dx\,ds\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2}$. [$ds$ constant].

116. $x^2y'' = xy' + ny$.

117. $x^2y'' = \sqrt{ax^2y'^2 + by^2}$.

118. $y''' \dfrac{ds^2}{dx^2} - ny'y''^2 = Yy'' \dfrac{ds^2}{dx^2}$. [$n = 1$ ou 3].

119. $x^2y'' = xy' + ny$. [$n = 4, \pm 3, -1, 0$].

120. $x^2y'' = \sqrt{3x^2y'^2 + 4y^2}$.

121. $5x^3y'' = (y - xy')^2$.

122. $2x^3y'' = 2xy' - 5y$.

123. $y''^2 + axy'^2 + b = 0$.

124. $y''(yy' + a) = y'(1 + y'^2)$.

125. $d^2y + dy^2 = dx^2$.

126. $(y''^2 + y'^2)^2 + y''^2 - y'^2 = 0$. [$y'' = ty'$].

127. $(x^2 + a^2)\,dx\,d^2y - 2x\,dx^2\,dy - (x^2 + a^2)x\,dy^3 = 0$.

128. $(a^2y'^2 + x^2)y'' = \dfrac{1}{2}xy'$.

129. $1 + y'^2 + xy'y'' = ay''\sqrt{1 + y'^2}$.

130. Trouver une courbe dont le rayon de courbure soit une fonction donnée de l'angle que fait la tangente avec Ox, $\rho = f(\tau)$.

131. Trouver une courbe pour laquelle $s = \varphi(\tau)$. Ce problème se ramène au précédent, puisque $\frac{ds}{d\tau} = \varphi'(\tau)$.

132. Trouver une courbe telle que la projection du rayon de courbure sur une direction fixe soit constante.

133. $\rho = a\mathrm{N}^3$.

134. $\rho = a\mathrm{N}$. $[a = \pm 1]$.

135. Trouver une surface de révolution pour laquelle la somme des courbures principales soit constante.

136. Trouver une courbe plane dont l'arc varie proportionnellement à l'arc de sa développée.

137. Trouver une courbe plane dont le rayon de courbure soit proportionnel au rayon vecteur. $\left[\frac{(u^2 + u'^2)^{\frac{3}{2}}}{u^3(u + u'')} = \frac{n}{u}\right]$.

138. Trouver une courbe dont la normale coupe l'axe des x à une distance de l'origine proportionnelle à l'ordonnée.

139. Trouver une courbe dont la tangente coupe l'axe des y à une distance de l'origine qui soit à l'ordonnée comme le rayon vecteur est à l'abscisse.

140. Équations de la forme $f(x, y, y'') = 0$. On a

$$xy'' = \mathrm{D}_x\left(x^2 \mathrm{D}_x \frac{y}{x}\right) = \mathrm{D}_x^2(xy) - 2y'.$$

(1) $x^2 y'' = 2y$.
(2) $(x^2 + y^2)^2 y'' + a^2 y = 0$.

141. $xy'' = y'$.

142. $x^2 y'' = xy' + 3y$.

143. $x^3 y'' = (y - xy')^2$.

144. $3y - 3xy' + 4y^2 y'' = 0$.

145. $y'^2 - yy'' = n\sqrt{y'^2 + a^2 y''^2}$.

146. $x^3 y'' = (y - xy')^2$.

147. $aby'' = \sqrt{y^2 + a^2 y'^2}$.

148. $ds^3 = a\,dx\,d^2y\sqrt{x^2 + y^2}$.

149. $x^4 y'' = (x^3 + 2xy)y' - 4y^2$.

150. $xy\,d^2y = y\,dx\,dy + x\,dy^2 + \dfrac{bx\,dy^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot$

151. $y'' - \dfrac{4}{x}y' + x^4y' - 6x^8y = x.$

XII. — Équations différentielles linéaires d'ordre quelconque.

1. $ay + by' + cy'' = 0.$ [Transformation du n° 873].

2. $y'' + a^2y + b^2 = 0.$

3. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$

4. $y'' - 5y' + 6y = x.$

5. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

6. $y''' + ay' + by = 0.$ [Discussion].

7. $y^{\text{IV}} + 2y'' + y = 0.$

8. $y^{\text{IV}} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25y = 0.$

9. $a^2y^{\text{IV}} = y''.$

10. $0 = y - 3a^2y'' + 2a^3y'''.$

11. $0 = y - a^3y'''.$

12. $0 = y - a^4y^{\text{IV}}.$

13. $0 = y + a^4y^{\text{IV}}.$

14. $0 = a^ny \mp y^{(n)}.$ $[n = 5, 7, \ldots].$

15. $d^2y + a\,dx\,dy + by\,dx^2 = f(x)\,dx^2.$

16. $y''' - 6my'' + 11m^2y' - 6m^3y = n^x.$

17. $y^{\text{IV}} - a^4y = \text{X}.$

18. $y^{\text{IV}} + a^4y = \text{X}.$

19. $y^{\text{IV}} = \dfrac{1}{a^2}y''.$

20. $y^{(n)} - y = 0.$

21. $\text{séc}\,x\,d^2y - \cos x\,dx\,dy = \sin x \,\text{tang}\,x\,dx\,dy.$

22. $y''' - 14y'' + 64y' - 96y = 0.$

23. $y''' - 7y'' + 6y = x^2.$

24. $y^{\text{IV}} - 8y''' + 23y'' - 28y' + 12y = x$.

25. $y'' + ay' + by = 0$. $[y = e^{\int z\,dx}]$.

26. $y^{\text{IV}} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$.

27. $y^{\text{IV}} + 2a^2y'' + a^4y = 0$.

28. $y^{\text{IV}} + 4ay''' + (6a^2 + 2b^2)y'' + 4a(a^2 + b^2)y' + (a^2 + b^2)^2y = 0$.

29. $y^{\text{IV}} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$.

30. $y'' + 4y' + 4y = ax^2$, ou $= 3e^{3x}$.

31. $y^{\text{V}} - 13y''' + 26y'' + 82y' + 104y = 0$.

32. $y''' - 7ay'' + 16a^2y' - 12a^3y = 0$.

33. $y^{\text{V}} - 12y^{\text{IV}} + 62y''' - 172y'' + 266y' - 160y = 0$.

34. $y^{\text{IV}} - 8y''' + 26y'' - 48y' + 45y = 0$.

35. $(a + \mathrm{D}_x)^n y = 0$.

36. $y^{\text{VI}} - 3y^{\text{V}} + 6y''' - 3y'' - 3y' + 2y = \mathrm{X}$.

37. $y''' - 7a^2y' + 6a^3y = e^{bx}$, ou $= x^2$.

38. $y'' - 2y' + y = x$.

39. $y'' + ay' - 6a^2y = b^x$.

40. $y'' + 2y' + 2y = x$.

41. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{x}{(1 + x)^2}$.

42. $y'' - 2ay' + a^2y = \sin bx$.

43. $y'' + y = x^n$.

44. $y^{\text{IV}} + 2a^2y'' + a^4y = \cos x$.

45. $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = \mathrm{X}$.

Exemple :

$\mathrm{X} = a\cos(\alpha x + \beta) + a'\cos(\alpha' x + \beta')$.

46. $y^{\text{IV}} - 10y''' + 62y'' - 210y' + 261y = e^x$.

47. $y'' + y = \cos x$.

48. $y^{\text{IV}} - y = e^x$, ou $= \cos x$.

49. $y^{\text{V}} - 2y^{\text{IV}} + 5y''' - 10y'' - 36y' + 72y = e^{ax}$

50. $y''' + y'' - y' + 15y = x^2$.

51. $(2 + D_x)^2 y = a x^2$.

52. $y'' - 3y' + 2y = 3x^2 - 4$.

53. $y'' - 5ay' + 6a^2 y = e^{bx}$.

54. $y'' + n^2 y = \text{séc}\, nx$.

55. $y''' - 7y^2 + 6y = x^2$.

56. $y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 0$.

57. $y^{\text{v}} - 5ay^{\text{IV}} + 10a^2 y''' - 10a^3 y'' + 5a^4 y' - a^5 = 0$

58. $y'' + y' - 2y = 0$.

59. $a^2 y^{\text{IV}} - y'' = 0$.

60. $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2) y = 0$.

61. $y''' - y'' + y' - y = X$.

62. $y'' - 6y' + 34y = 0$.

63. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

64. $y'' + n^2 y + ax + b = 0$.

65. $y'' - 2my' + (m^2 + n^2) y = 0$.

66. $y'' + 2my' + n^2 y = 0$.

67. $y - 2y'' + y^{\text{IV}} = ae^x + be^{-x} + \alpha \sin x + \beta \cos x$.

68. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 1 + 2e^{2x}$.

69. $y = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{r^2 e^{2ni} + x^2} \frac{dx}{x}, \quad (-\pi < n < \pi)$. [485].

$$\frac{d^2 y}{da^2} - r^2 e^{2ni} y + \frac{\pi}{2} = 0.$$

70. $y'' = ax + by$. $[ax + by = z]$.

71. $y + 2y'' + y^{\text{IV}} = \sin x$.

72. $x^2 y'' = xy' + 3y$.

73. $x^2 y'' + axy' + by = 0$. [Discussion].

74. $(2 + 3x)^2 y'' + 7(2 + 3x) y' + 4x = 0$.

75. $y^2 - 2xyy' + x^2 y'^2 + x^2 yy'' = 0$. $[y^2 = z]$.

76. $4y - 3(2 - 3x) y' + (2 - 3x)^2 y'' = 5(2 - 3x)^3$.

77. $x^2y'' - 3xy' + 2y = x - 3x^3$.

78. $y'' - 2bxy' + b^2x^2y = 0$. [$y = e^z$, $t = z' - bx$].

79. $$\begin{cases} y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0, \\ x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0, \\ x^2(\log x - 1)y'' - xy' + y = 0. \end{cases}$$

Abaisser l'ordre de ces équations, qui admettent l'intégrale particulière $y = x$.

80. $y'' + ay'^2 + bxy'^3 = 0$. [Prendre y pour variable indépendante].

81. $(1 - x^2)y'' - xy' + ny = 0$. [$x = \cos t$].

82. $x^2y'' + xy' - y = x^n$.

83. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^n$.

84. $x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{(1-x)^2}$.

85. $(1+x)^3y''' + (1+x)^2y'' + 3(1+x)y' - 8y = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$.

86. $(2 + 3x)^2y'' + 7(2 + 3x)y' + 4 = 0$.

87. $(2 + x)^2y'' - 3(2 + x)^2y' + 4y = (2 + x)^2$.

88. $(1 + ax^2)y'' + axy' + b^2y = 0$. $\left[\frac{dx}{\sqrt{1 + ax^2}} = dt\right]$.

89. $f(x)y'' + \frac{1}{2}f'(x)y' + ay = 0$. $\left[\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = dt\right]$.

90. $y'' + Py' + Qy = 0$. Faire disparaître le second terme en posant

$$y = ze^{-\frac{1}{2}\int P dx}.$$

91. $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x}$.

92. $x^2y'' + 2axy' + [a(a-1) - b^2x^2]y = 0$.

93. $y'' + 3axy' + (a^2x^2 + b)y = 0$.

94. Condition pour que l'équation

$$(a + bx)y + (a' + b'x)y' + (a'' + b''x)y'' = 0$$

admette une intégrale de la forme e^{rx}. Achever l'intégration dans ce cas.

95. $(1+x)^2y''+(1+x)y'+4y=\sin\log(1+x)$.

96. Intégrer les équations suivantes, en cherchant une intégrale particulière de la forme $y=x^m$:

(1) $d^2y+ax^2dx\,dy-axy\,dx^2=0$,

(2) $(1+x^3)x^2y''+(1+2x^3)xy'-(4+6x^3)y=0$,

(3) $(1+x^3)x^2y''+(5+2x^3)xy'-(12+6x^3)y=0$.

97. $y''+\dfrac{y'}{x}-\dfrac{y}{x^2}=\dfrac{a}{x^2-1}\cdot$

98. $y''+\dfrac{1}{x}y'-\dfrac{y}{x^2}=\dfrac{a}{x^2-1}\cdot$

99. $x^2y''+xy'-y=ax^n$.

100. $y''-\dfrac{a^2-1}{4x^2}y=\dfrac{m}{\sqrt{x^{a+1}}}\cdot$

101. $y''+\dfrac{2}{x}y'+a^2y=0$.

En développant en série par la méthode des coefficients indéterminés, on reconnaît que l'équation admet l'intégrale $y_1=\dfrac{\sin ax}{x}\cdot$

102. $y''+\dfrac{2}{x}y'+a^2y=X$.

103. $x^2\,d^2y=x\,dx\,dy+3y\,dx^2$.

[Transformer cette équation successivement d'après les règles des nos 872, 873, 875].

104. $(1-x)y'''-3y''=0$.

105. $(6-6x\,D_x+3x^2D_x^2-x^3D_x^3)y+x=0$.

106. $[1-x\,D_x+x^2(\log x-1)D_t^2]y+\dfrac{x}{\log x}=0$.

107. $y''+(a+bx)y'+ab\,xy=0$. $[y=ze^{rx}]$.

108. $(a^2-x^2)y''+2(m-1)xy'-m(m-1)y=0$.

$[y_1=(a+x)^m,\ y_1y'-y'_1y=z]$.

109. $y''+\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)y=0$. $\left[y=\dfrac{z}{x}\right]\cdot$

XIII. — Équations différentielles simultanées.

1. $x' + ay = 0, \quad y' + bx = 0.$

2. $\begin{cases} x'' - 3x - 4y + 3 = 0, \\ y'' + x - 8y + 5 = 0. \end{cases}$

3. $D_t x = y + t, \quad D_t y = x + t.$

4. $(5 + D_t)x - 2y = 0, \qquad 2x + (1 + D_t)y = 0.$

5. $(5 + D_t)x + y = e^t, \qquad -x + (3 + D_t)y = e^{2t}.$

6. $(5 + D_t)x - 2y = e^t, \qquad -x + (6 + D_t)y = e^{2t}.$

7. $(-3 + D_t^2)x - 4y + 3 = 0, \; x + (1 + D_t^2)y + 5 = 0.$

8. $D_t x = y + z, \quad D_t y = z + x, \quad D_t z = x + y.$

9. $D_t x = D_t y = \dfrac{x - y}{z - t}, \quad D_t z = x - y + a.$

10. $D_t x + D_t^2 y = 2x, \qquad D_t y + D_t^2 x = 2y.$

11. $(5 + D_t)x + 4y = e^t, \; x + (2 + D_t)y = e^{2t}.$

12. $D_t x + y + z = 0, \quad x + D_t y + 2z = 0, \quad x - y + D_t z = 0.$

13. $\begin{cases} (1 + D_t + 2D_t^2)x + (1 + D_t + D_t^2)y = 0, \\ (-9 + 96 D_t + D_t^2)x + (15 + 50 D_t + D_t^2)y = 0. \end{cases}$

14. $D_t^2 x = 3x + 4y - 3, \quad D_t^2 y = 8y - x - 5.$

15. Déterminer les intégrales définies

$$x = \int_0^\infty \frac{e^{-t} \sin at}{\sqrt{t}}\, dt, \quad y = \int_0^\infty \frac{e^{-t} \cos at}{\sqrt{t}}\, dt,$$

en partant de ce qu'elles satisfont aux équations différentielles

$$a\frac{dx}{da} + \frac{dy}{da} = -\frac{1}{2}x, \quad \frac{dx}{da} - a\frac{dy}{da} = \frac{1}{2}y.$$

16. $\begin{cases} (44 + 4D_t)x + (49 + 9D_t)y = t, \\ (34 + 3D_t)x + (38 + 7D_t)y = e^t. \end{cases}$

17. $\begin{cases} (11 + 4D_t)x + (31 + 9D_t)y = e^t, \\ (8 + 3D_t)x + (24 + 7D_t)y = e^{2t}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} (2 + 4D_t)x + (31 + 9D_t)y = e^t, \\ (1 + 3D_t)x + (24 + 7D_t)y = 3. \end{cases}$

19. $(4 + D_t)x + 3y = t, \quad 2x + (5 + D_t)y = e^t.$

20. $(D_t - 2)x + (2D_t + 2)y = 3e^t, \quad (3D_t + 2)x + (D_t + 1)y = 4e^{2t}.$

21. $(a - D_t)x + by + c = 0, \quad a'x + (b' - D_t^2)y + c' = 0.$

22. $(4 + D_t)x + 3y = t, \quad 2x + (5 + D_t)y = e^t.$

23. $$\begin{cases} (a_1 + D_t^2)x + b_1 y + c_1 z = T_1, \\ a_2 x + (b_2 + D_t^2)y + c_2 z = T_2, \\ a_3 x + b_3 y + (c_3 + D_t^2)z = T_3. \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} D_t^2 x - \dfrac{a+b-c}{b} m D_t y - 4m^2 \dfrac{a-c}{b} x = 0, \\ D_t^2 y + \dfrac{a+b-c}{b} m D_t x - m^2 \dfrac{b-c}{a} y = 0. \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} D_t^2 x + ax - b\cos nt\,(x\cos nt + y\sin nt) = 0, \\ D_t^2 y + ay - b\sin nt\,(x\cos nt + y\sin nt) = 0. \\ \quad [u = x\cos nt + y\sin nt,\ v = x\sin nt - y\cos nt]. \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} (8D_t^2 - 17)x + (7D_t^2 - 88)y + 59 = 0, \\ (5D_t^2 - 11)x + (4D_t^2 - 52)y + 35 = 0. \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} (11D_t^2 - 11)x + (8D_t^2 - 36)y + 73 = 0. \\ (7D_t^2 - 7)x + (5D_t^2 - 23)y + 46 = 0. \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} (11D_t^2 - 25)x + (8D_t^2 - 36)y + 73 = 0, \\ (7D_t^2 - 16)x + (5D_t^2 - 23)y + 46 = 0. \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} aD_t x + (c-b)yz = 0, \\ bD_t y + (a-c)zx = 0, \\ cD_t z + (b-a)xy = 0. \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} (31 + 9D_t)x + (2 + 4D_t)y = e^t, \\ (24 + 7D_t)x + (1 + 3D_t)y = 3. \end{cases}$$

31. $(a + D_t)x + by = mt, \qquad bx + (a + D_t)y = nt.$

32. $(a + D_t^2)x + by + c = 0, \quad a'x + (b' + D_t^2)y + c' = 0.$

33. $(-3 + D_t^2)x - 4y + 3 = 0, \ x + (1 + D_t^2)y + 5 = 0.$

34. $(1 - D_t)^2 x - 2D_t y = e^{2t}, \ (6 + 2D_t + D_t^2)y + (5 + D_t)x = e^t.$

35. $(3 + D_t)x - 2y = t, \quad x + (5 + D_t)y = e^t.$

36. $$\begin{cases} (31 + 9D_t)x + (11 + 4D_t)y = 0 \ [\text{ou} = e^t], \\ (24 + 7D_t)x + (8 + 3D_t)y = 0 \ [\text{ou} = e^{2t}]. \end{cases}$$

XIV. — Calcul des variations.

1. Minimum de $\int_0^1 y'^2 dx$, avec les conditions $y_0 = 1$, $\int_0^1 \frac{y}{y_1} dx = -1$.

2. Maximum ou minimum des intégrales

1° $\int \frac{ds}{\sqrt{x}}$.

2° $\frac{1}{y'} \int_{x_0}^{x_1} y\,dx$.

3° $\int \frac{y^2 y''}{y'} dx$.

3. Déterminer la forme d'un corps de révolution de volume donné, de manière que la durée d'une oscillation infiniment petite autour d'un axe horizontal, perpendiculaire à l'axe de révolution, soit un minimum.

4. Trouver une courbe AMB telle que la courbe ayant même abscisse x et une ordonnée égale à la longueur de l'arc correspondant AM comprenne, avec l'axe des x, une aire maximum ou minimum.

5. Maximum ou minimum de $\int_{x_0}^{x_1} \varphi(s)\,dx$ pour une valeur donnée de

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{dx} dx.$$

6. Trouver la courbe homogène dont l'arc a le plus grand ou le plus petit moment d'inertie par rapport à un point donné.

7. Parmi les courbes de même rayon de courbure constant que l'on peut mener entre deux points, quelle est la plus courte ?

8. Brachistochrone sur une surface donnée.

9. Brachistochrone dans un milieu résistant homogène.

10. Maximum ou minimum de $\int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{z}}$, pour $\frac{dz}{dx} + a z^n \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = a$.

11. Courbe fermée de longueur donnée et d'aire maximum, ou d'aire donnée et de longueur minimum.

12. Une courbe étant tracée sur une sphère, tracer sur cette sphère une autre courbe de longueur donnée, et comprenant avec la première une aire sphérique maximum.

13. Parmi les corps homogènes de révolution, trouver celui qui exerce la plus grande attraction sur un point A de sa masse.

14. Trouver la brachistochrone parmi les courbes de longueur donnée ou d'aire donnée.

15. Brachistochrone sur un plan incliné ou sur une sphère.

16. Parmi les courbes de même longueur, quelle est celle dont le centre de gravité est le plus bas, la courbe étant située dans un plan incliné donné ?

17. Maximum ou minimum de $\int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx$, pour $\int_{x_0}^{x_1} y\,dx = a$, $\int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{dx}\,dx = b$.

18. Déterminer la position d'un fil flexible et inextensible sur une surface donnée, de manière que son centre de gravité soit le plus bas possible.

LIVRE CINQUIÈME.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES A PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

CHAPITRE PREMIER.

ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES DU PREMIER ORDRE ET DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

1003. Nous avons vu [772 et suiv.] que, si p et q sont deux fonctions données des variables x, y, on peut déterminer une fonction z de ces variables, considérées comme indépendantes, au moyen de la relation différentielle

$$dz = p\,dx + q\,dy, \tag{1}$$

toutes les fois que la condition *nécessaire et suffisante*

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \tag{2}$$

est vérifiée. Alors la solution du problème s'obtient au moyen de deux quadratures.

Nous allons maintenant examiner le cas où l'on se propose de déterminer la fonction z au moyen d'une relation de la forme (1), dans laquelle p et q ne sont plus des fonctions des seules variables indépendantes x, y, mais contiennent explicitement la variable z elle-même.

Il est un cas qui se ramène immédiatement à celui que nous

avons déjà traité : c'est celui où les variables sont *séparables*, c'est-à-dire où p et q ne contiennent z que dans un facteur commun Z. Si l'on suppose

$$p = \mathrm{ZP}, \quad q = \mathrm{ZQ},$$

P et Q étant deux fonctions de x et de y seulement, l'équation, qui devient

$$\frac{dz}{\mathrm{Z}} = \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy,$$

sera intégrable si P et Q satisfont à la condition $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}$, et son intégrale sera une relation entre x, y, z et une constante arbitraire.

Soit, par exemple, l'équation

$$(x^2 + y^2)\,dz = (z - a)(x\,dy - y\,dx).$$

En l'écrivant sous la forme

$$\frac{dz}{z - a} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2},$$

on voit que le second membre est une différentielle exacte, et il vient, en intégrant,

$$\log(z - a) = \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} + \log \mathrm{C}, \quad \text{ou} \quad z - a = \mathrm{C}e^{\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}}.$$

1004. Considérons maintenant le cas général.

Une équation de la forme

$$(3) \qquad \mathrm{F}(x, y, z) = \mathrm{C},$$

dans laquelle on fait varier le paramètre arbitraire C, représente une série de surfaces. En la différentiant, l'équation obtenue

$$(4) \qquad d\mathrm{F}(x, y, z) = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\,dz = 0,$$

exprimera une propriété commune à toutes les surfaces représentées par l'équation (3), et, réciproquement, cette équation (4) équivaudra parfaitement à l'équation (3), qui en est la conséquence.

Si, au lieu d'être résolue par rapport à C, l'équation de la série de surfaces est de la forme

$$(5) \qquad F(x, y, z, C) = 0,$$

en éliminant C entre cette équation et sa différentielle

$$(6) \qquad dF(x, y, z, C) = 0,$$

on obtiendra encore une relation entre x, y, z et leurs différentielles, qui exprimera une propriété commune à toutes les surfaces de la série. De plus, en raisonnant comme au n° 784, on verra que, si l'élimination de C se fait sans introduction de facteurs étrangers, l'équation différentielle obtenue équivaudra à l'équation primitive (5) et représentera la même série de surfaces.

L'équation (6) étant linéaire par rapport à dx, dy, dz, si l'on substitue dans les coefficients de ces différentielles la valeur de C tirée de l'équation (5) (que cette valeur soit ou non exprimable explicitement par les signes des fonctions élémentaires), cette équation conservera sa forme linéaire et aura pour type général

$$(7) \qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

P, Q, R étant des fonctions explicites ou implicites de x, y, z. Si ces fonctions avaient plusieurs déterminations, il en résulterait plusieurs formes pour l'équation (7), et l'on pourrait, par la multiplication, réunir ces diverses formes en une équation unique, laquelle serait alors de degré supérieur par rapport à dx, dy, dz, mais dont le premier membre jouirait de la propriété d'être décomposable en facteurs linéaires par rapport à ces différentielles.

Si l'on pose, pour plus de simplicité,

$$-\frac{P}{R} = p, \quad -\frac{Q}{R} = q,$$

l'équation différentielle prendra la forme

$$(1) \qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

sous laquelle nous allons l'étudier.

1005. Nous avons vu que, si p et q étaient des fonctions de x et de y seulement, ces fonctions devaient nécessairement satis-

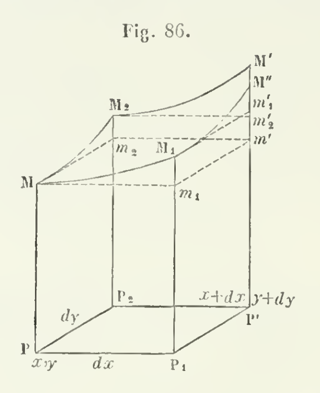
faire à la condition (2) pour que l'équation (1) pût être intégrée par une relation unique entre x, y, z et une constante arbitraire. Voyons quelle est la condition analogue qui doit avoir lieu lorsque p et q sont des fonctions de x, y, z, et, pour plus de clarté, employons dans cette recherche le langage géométrique.

En un point quelconque P (x, y) du plan des xy, élevons une ordonnée arbitraire $PM = z$ (*fig.* 86). Si l'on suppose d'abord y constant, l'équation différentielle, qui se réduira à l'équation à deux variables

$$dz = p\,dx,$$

déterminera une courbe MM_1 passant au point arbitraire M, et,

Fig. 86.



si l'équation (1) représente réellement une surface, cette courbe sera la section de la surface par un plan parallèle au plan des zx, et y jouera dans l'équation de cette courbe le rôle de paramètre variable. Si l'on donne à y toutes les valeurs possibles, on obtiendra une série de courbes telles que MM_1, qui engendreront la surface. Ainsi, si l'on change y en $y + dy$, la courbe MM_1 se changera en M_2M', et le point M', où elle rencontrera l'ordonnée élevée au point $P'(x + dx, y + dy)$, sera le point de la surface situé sur cette ordonnée.

Si l'on suppose maintenant x constant, et que l'on fasse varier y, l'équation

$$dz = q\,dy$$

déterminera de même une courbe MM_2. En faisant varier le paramètre x dans l'équation de cette courbe, elle se déplacera en

engendrant la surface, et elle devra encore rencontrer l'ordonnée $P'M''$ en un point M'', qui sera le point de la surface situé sur cette ordonnée.

Pour que l'équation (1) puisse convenir à une surface, il faut que celle-ci soit susceptible de cette double génération et que le point M'' coïncide avec M', ou, en d'autres termes, que le quadrilatère curviligne $MM_1M'M_2$ se ferme. Il faut donc que l'on ait $M_1m_1 + M''m'_1 = M_2m_2 + M'm'_2$, quels que soient les accroissements dx, dy des coordonnées x, y, c'est-à-dire que l'on ait, en employant la notation des différentielles partielles,

$$d_x z + d_y(z + d_x z) = d_y z + d_x(z + d_y z),$$

ou enfin

$$(8) \qquad d_y(d_x z) = d_x(d_y z),$$

équation qui doit avoir lieu rigoureusement, et qui exprime la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation différentielle puisse être vérifiée par l'ordonnée d'une surface.

Supposons maintenant les accroissements dx, dy infiniment petits. Alors, en désignant par ε_1 une quantité infiniment petite en même temps que dx, et par ε_2 une quantité infiniment petite en même temps que dy, on aura, en vertu de l'équation différentielle,

$$d_x z = (p + \varepsilon_1)\,dx, \quad d_y z = (q + \varepsilon_2)\,dy.$$

On a donc

$$d_y(d_x z) = (d_y p + d_y \varepsilon_1)\,dx.$$

Or, si l'on désigne, pour abréger, par la notation

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

la dérivée partielle par rapport à y d'une fonction de x, y, z, prise en faisant varier y en tant qu'il y entre soit explicitement, soit implicitement par z, on a, ε'_1 étant infiniment petit en même temps que l'accroissement dy,

$$d_y p = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \varepsilon'_1\right] dy.$$

De plus [296], $d_y \varepsilon_1$ est infiniment petit de même ordre que le produit $dx\,dy$. Donc, en désignant par ε' une quantité infiniment

petite en même temps que dx et dy, on aura

$$d_y(d_x z) = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \varepsilon'\right] dx\, dy.$$

On trouvera de même la formule analogue

$$d_x(d_y z) = \left[\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \varepsilon''\right] dy\, dx.$$

Donc la condition (8) devient, en divisant par $dx\,dy$,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \varepsilon' = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \varepsilon'',$$

et, comme $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)$ et $\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$ sont des constantes relativement à dx et à dy, il en résulte [166] que l'on a rigoureusement

$$(9) \qquad \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right),$$

ou, en développant, et remplaçant, en vertu de l'équation (1), $\frac{\partial z}{\partial x}$ par p et $\frac{\partial z}{\partial y}$ par q,

$$(10) \qquad \frac{\partial p}{\partial y} + q\,\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial x} + p\,\frac{\partial q}{\partial z}.$$

Cette égalité doit avoir lieu pour tout système de coordonnées x, y, z satisfaisant à l'équation de la surface déterminée par l'équation différentielle. Or, d'après la manière dont nous avons construit cette surface au moyen de ses génératrices, l'ordonnée initiale PM a pu être choisie arbitrairement, ce qui revient à dire que l'équation de la surface doit renfermer une constante arbitraire. Mais l'équation (10) ne pourrait pas subsister si la valeur de z correspondante aux valeurs quelconques x, y était arbitraire. Il faut donc que cette égalité soit identiquement vérifiée par les valeurs des fonctions p et q, quels que soient x, y, z. Cette identité est donc nécessaire; nous verrons plus loin qu'elle est aussi suffisante.

Si l'on suppose l'équation donnée sous la forme (7), et que l'on remplace p, q par $-\frac{P}{R}$, $-\frac{Q}{R}$, la condition (10) prendra la forme

plus symétrique

$$(11)\qquad P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0.$$

1006. Si la condition (10) n'est pas identiquement vérifiée, l'équation différentielle (1) ne pourra être intégrée par une relation unique entre x, y, z, renfermant une constante arbitraire.

Il peut se faire, dans certains cas, que l'équation (10), n'étant pas identique, donne, par la différentiation, une valeur de dz en x, y, z, dx, dy, qui satisfasse à l'équation (1), c'est-à-dire qui devienne égale à $p\,dx + q\,dy$, lorsqu'on remplace partout z par sa valeur tirée de l'équation (10). Dans ce cas, l'équation différentielle, quoique n'admettant pas d'intégrale générale, c'est-à-dire ne représentant pas une série de surfaces, admet cependant une intégrale particulière sans constante arbitraire, c'est-à-dire qu'elle représente une surface unique et déterminée. Nous verrons plus loin un exemple de ce cas.

Si la différentielle de l'équation (10) ne s'accorde pas avec l'équation (1), quels que soient dx, dy, alors l'équation (1) ne peut être vérifiée par aucune relation unique entre x, y, z, et elle ne peut convenir à aucune surface. On pourrait alors établir entre x, y, z une relation arbitraire quelconque, au moyen de laquelle on exprimerait z, par exemple, en fonction de x et de y, et dz en fonction de x, y, dx, dy. En substituant ces valeurs dans l'équation (1), celle-ci deviendrait une équation différentielle ordinaire entre deux variables. En l'intégrant, on aurait une relation entre x, y et une constante arbitraire, relation qui représenterait une série de courbes tracées sur la surface choisie arbitrairement. Nous verrons plus loin comment on peut arriver simplement à cette solution.

1007. On voit aisément que, si la condition (9) ou (10) est vérifiée identiquement, on peut alors tirer de l'équation différentielle (1) le développement de z par le théorème de Taylor.

D'abord, sous cette condition (9), on peut tirer de l'équation (1) les valeurs de toutes les dérivées partielles d'ordre quelconque de z, exprimées au moyen de x, y, z. On a déjà

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=q.$$

Ensuite il vient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right),$$

où l'on remplacera $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ par p et q ; puis, en vertu de la condition (9),

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right).$$

En passant aux dérivées du troisième ordre, on aura, par exemple, soit en partant de $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, soit de $\frac{\partial z}{\partial y} = q$, les valeurs, identiques d'après la condition (9),

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y} = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x\, \partial y}\right) = \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right),$$

et de même, en général,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m\, \partial y^n} &= \left(\frac{\partial^{m+n-1} p}{\partial x^{m-1}\, \partial y^n}\right)\\ &= \left(\frac{\partial^{m+n-2} \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}{\partial x^{m-1}\, \partial y^{n-1}}\right) = \left(\frac{\partial^{m+n-2} \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)}{\partial x^{m-1}\, \partial y^{n-1}}\right) = \left(\frac{\partial^{m+n-1} q}{\partial x^m\, \partial y^{n-1}}\right),\end{aligned}$$

de sorte que les valeurs tirées de p sont identiques aux valeurs tirées de q.

Cela fait, soit z_0 la valeur arbitraire de z correspondante au point initial (x_0, y_0) du plan des xy. En mettant pour x, y, z les valeurs x_0, y_0, z_0 dans les expressions de toutes les dérivées partielles de z, on obtiendra les valeurs de tous les coefficients du développement de z suivant les puissances de $x - x_0$ et de $y - y_0$, et ce développement contiendra la seule constante arbitraire z_0. On voit que la condition nécessaire et suffisante pour que ce développement soit possible, c'est que la condition (9) ait lieu.

1008. La surface variable $F(x, y, z, C) = 0$, dont l'équation est l'intégrale générale de l'équation (1), peut avoir une enveloppe, dont l'équation s'obtiendrait, comme celle de l'enveloppe d'une

courbe plane, par l'élimination de C entre les équations $F = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$.

On démontrerait, comme pour le cas des courbes planes, que l'équation de l'enveloppe satisfait aussi à l'équation différentielle des enveloppées, dont elle est une *solution singulière*.

1009. Une équation aux différentielles totales,

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0, \tag{7}$$

lorsqu'elle est intégrable, admet un *multiplicateur* μ, c'est-à-dire un facteur tel que, en multipliant par lui le premier membre de l'équation, le produit devient une différentielle exacte.

En effet, si l'équation (7) admet une intégrale renfermant une constante arbitraire C, cette intégrale, résolue par rapport à C, prendra la forme $f(x, y, z) = C$, d'où l'on tire, en différentiant,

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0. \tag{12}$$

Puisque la valeur de z tirée de $f = C$ satisfait à l'équation (7), il faut que les coefficients de dx, dy, dz soient proportionnels dans les deux équations (7) et (12), c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{Q} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{R},$$

et l'on prouverait, en raisonnant comme au nº 829, que ces deux relations doivent être des identités. En désignant donc par μ la valeur commune des trois rapports précédents, on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mu P, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \mu Q, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \mu R.$$

Donc $\mu(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = df(x, y, z)$ est une différentielle exacte d'une fonction des trois variables x, y, z, considérées comme indépendantes.

Les conditions d'intégrabilité de cette différentielle donnent [776] les relations identiques

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu R)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\mu R)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial z}, \quad \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}.$$

Développant les calculs et ajoutant ces trois égalités, respectivement multipliées par P, Q, R, on obtient la condition (11), laquelle doit être, par suite, identiquement vérifiée toutes les fois que l'équation (7) est intégrable par une équation renfermant une constante arbitraire.

1010. Voyons maintenant comment on peut trouver l'intégrale d'une équation donnée

$$dz = p\,dx + q\,dy, \tag{1}$$

lorsque cette intégrale existe. Cette équation équivaut aux deux équations

$$d_x z = p\,dx, \tag{13}$$

$$d_y z = q\,dy. \tag{14}$$

Si elle admet une solution, celle-ci doit être comprise dans l'intégrale générale de l'équation (13), considérée comme ayant lieu entre les deux seules variables x et z. L'intégrale générale de (13) peut être mise sous la forme

$$z = f(x, y, \mathrm{Y}), \tag{15}$$

Y étant une quantité arbitraire, indépendante de x, et pouvant être considérée comme une fonction arbitraire de y. Il reste à voir si, par une détermination convenable de cette quantité Y, on peut faire en sorte que la valeur de z donnée par l'équation (15) satisfasse aussi à l'équation (14). Pour cela il faut que, en tirant de (15) les valeurs de z et de $d_y z$, et les portant dans l'équation (14), celle-ci puisse être identiquement vérifiée par une détermination convenable de Y en fonction de y seul. L'équation (14) devient, par cette substitution,

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{Y}}\frac{d\mathrm{Y}}{dy} = q, \tag{16}$$

z étant remplacé dans le second membre par $f(x, y, \mathrm{Y})$. Pour que cette équation puisse être vérifiée par une valeur de Y en y seul, il faut que ses coefficients soient indépendants de x, et par suite que x en disparaisse en même temps que z, ou que x ne figure plus dans l'équation que dans un facteur que l'on puisse supprimer.

Réciproquement, si cette condition est vérifiée, la relation (16)

sera une équation différentielle du premier ordre entre les deux variables y et Y, et l'on pourra en tirer, par l'intégration, une valeur de Y en fonction de y et d'une constante arbitraire C.

On voit donc que, en substituant pour Y cette valeur en y et C dans l'expression (15) de z, on obtiendra une valeur de z qui satisfera à la fois aux deux équations (13) et (14), et par suite à l'équation proposée (1).

1011. Voyons maintenant comment on pourra, avant d'effectuer l'intégration de l'équation (13), reconnaître d'avance si x disparaîtra bien lorsqu'on éliminera z entre (14) et (15). Si la disparition a lieu dans l'équation (16), la quantité $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{dY}{dy} - q$ étant indépendante de x, ou ne contenant x que dans un facteur commun, sa dérivée partielle par rapport à x sera nulle, soit identiquement, soit en vertu de l'équation (16), et l'on aura identiquement

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial Y}\frac{dY}{dy} = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right), \tag{17}$$

lorsqu'on remplacera z par $f(x, y, Y)$, et Y par sa valeur en y et C.

Mais, (15) étant l'intégrale de (13), on aura identiquement, en remplaçant z par $f(x, y, Y)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p,$$

et, comme il doit en être de même quel que soit y, les dérivées partielles des deux membres par rapport à y seront égales, d'où l'on tirera

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial Y}\frac{dY}{dy} = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right), \tag{18}$$

ce qui aura lieu, pour $z = f(x, y, Y)$, quel que soit Y indépendant de x, et en particulier pour la valeur de Y déterminée en y et C. Or, pour cette valeur de Y, les premiers membres des équations (17) et (18) sont égaux; donc il en est de même des seconds, et l'on a, par conséquent, la condition

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right), \tag{19}$$

qui, étant développée, n'est autre que la condition (10).

Mais, Y contenant une constante arbitraire au moyen de laquelle on peut, pour des valeurs données quelconques de x et de y, faire prendre à $z=f(x,y,Y)$ une valeur arbitraire, l'égalité (19) devra avoir lieu pour un système quelconque de valeurs de x,y,z; donc cette égalité devra avoir lieu identiquement, sans que l'on ait besoin de remplacer z par sa valeur (15). Ainsi, l'identité (10) est une conséquence nécessaire de l'intégrabilité de l'équation (1).

Réciproquement, si l'identité (10) a lieu quels que soient x,y,z, elle subsistera encore lorsqu'on prendra pour z la valeur (15), intégrale de l'équation (13). Cette valeur de z donne identiquement, quel que soit Y indépendant de x,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=p,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial Y}\frac{dY}{dy}=\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right).$$

Donc on aura aussi, pour la même valeur de z, l'équation (17), qui exprime que la quantité $\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{dY}{dy}-q$ est indépendante de x. On peut donc rendre cette quantité nulle par une détermination convenable de Y en fonction de y et d'une constante arbitraire, et, pour cette valeur de Y, la valeur (15) de z satisfera à l'équation (14). Comme elle satisfaisait déjà à l'équation (13), il s'ensuit qu'elle sera une intégrale de l'équation (1). Donc la condition (10) est suffisante pour l'intégrabilité de l'équation (1).

1012. Voici, d'après ce qui précède, comment on devra procéder pour obtenir l'intégrale générale d'une équation donnée

$$(7)\qquad P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0.$$

Comme on peut toujours prendre à volonté, parmi les trois variables x,y,z, celle que l'on considérera comme une fonction inconnue des deux autres, supposées indépendantes, égalons d'abord à zéro celle des trois différentielles pour laquelle l'équation restante fournira le calcul le plus simple, dy par exemple. Intégrons alors l'équation à deux variables

$$P\,dx+R\,dz=0,$$

dans laquelle on regarde y comme une constante. On obtient ainsi une intégrale de la forme

$$(18)\qquad F(x,y,z,Y)=0,$$

Y étant une fonction inconnue de y. Différentions maintenant cette équation partiellement par rapport à y, et, entre la différentielle

$$d_y F(x, y, z, Y) = 0,$$

l'équation (18) et l'équation différentielle

$$Q dy + R dz = 0,$$

éliminons z et $\frac{\partial z}{\partial y}$. Si la condition d'intégrabilité est remplie, le résultat de cette élimination devra être une relation entre les seules quantités y, Y, $\frac{dY}{dy}$, d'où x aura disparu. En intégrant cette nouvelle équation différentielle, on aura une valeur de Y en fonction de y et d'une constante arbitraire, et cette valeur, substituée dans (18), donnera l'intégrale générale de l'équation (7).

Exemples. — I. Soit l'équation

$$(1 + x + y + z) dx + dy + dz = 0.$$

En supposant d'abord $dx = 0$, x constant, on aura à intégrer l'équation

$$dy + dz = 0, \quad \text{d'où} \quad y + z = X.$$

En différentiant cette équation par rapport à x, y étant constant, il vient $dz = dX$. Substituant cette valeur et celle de $y + z$ dans l'équation proposée, où l'on aura fait $dy = 0$, il vient

$$(1 + x + X) dx + dX = 0, \quad \text{d'où [821]} \quad X = -x + Ce^{-x}.$$

L'intégrale générale de l'équation proposée est donc

$$e^x (x + y + z) = C.$$

II. Soit l'équation

$$y dx - x dy - \frac{y^2}{z} dz = 0.$$

En supposant z constant, on a $y dx - x dy = 0$, d'où

$$y = Zx, \quad d_z y = x dZ;$$

substituant ces valeurs de y et de dy dans l'équation proposée, où

l'on aura fait $dx = 0$, elle devient

$$0 = -x^2 dZ - \frac{x^2 Z^2}{z} dz, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{Z} = \log \frac{z}{C},$$

et enfin

$$z = Ce^{\frac{x}{y}}.$$

Remarquons que l'équation proposée peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dz}{z} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2},$$

où les variables sont séparées [1003].

III. Soit l'équation

$$(y + z)y\,dx + (x + z)z\,dy + (y - x)y\,dz = 0,$$

et supposons $dy = 0$, y constant. L'équation

$$\frac{dx}{y - x} + \frac{dz}{y + z} = 0 \quad \text{donne} \quad y + z = (y - x)Y,$$

d'où, en différentiant par rapport à y,

$$dy + dz = (y - x)\,dY + Y\,dy = (y + z)\frac{dY}{Y} + Y\,dy,$$

et, à cause de $x + z = (x - y)(1 - Y)$, l'équation

$$(x + z)z\,dy + (y - x)y\,dz = 0$$

devient, en réduisant et divisant par $(x - y)^2$,

$$\frac{dy}{y} + \frac{dY}{Y(Y - 1)} = 0, \quad \text{d'où} \quad Y = \frac{y}{y - C},$$

et par suite

$$y(x + z) = C(y + z).$$

IV. Soit encore l'équation

$$(x^2 - y^2 + z^2)\,dx - z^2\,dy + \left[z + (x + y)\frac{x}{z}\right](y - x)\,dz = 0.$$

En faisant $dz = 0$, il vient

$$(x^2 - y^2 + z^2)\,dx - z^2\,dy = 0,$$

équation qui est évidemment vérifiée par $y = x$. On est porté à croire, d'après cela, qu'elle se simplifiera si l'on pose

$$y = x + u,$$

ce qui donne, en effet,

$$z^2 \frac{du}{dx} + 2ux = -u^2,$$

équation de Bernoulli [824], dont l'intégrale est, en se rappelant que z joue ici le rôle d'une constante,

$$\frac{1}{u} = e^{\frac{x^2}{z^2}}\left(Z + \frac{1}{z^2}\int e^{-\frac{x^2}{z^2}}dx\right),$$

ou, en posant généralement $\int e^{-t^2}dt = \mathrm{f}(t)$,

$$\frac{1}{u} = e^{\frac{x^2}{z^2}}\left[\frac{1}{z}\,\mathrm{f}\left(\frac{x}{z}\right) + Z\right].$$

Différentions maintenant cette équation partiellement par rapport à z, en supposant x constant, et y et par suite u fonctions de z. On trouve

$$d\frac{1}{u} = \frac{1}{u}\,d\frac{x^2}{z^2} + e^{\frac{x^2}{z^2}}\,d\left[\frac{1}{z}\,\mathrm{f}\left(\frac{x}{z}\right) + Z\right].$$

On a d'ailleurs $y = x + u$, d'où $dy = du$, ce qui, avec $dx = 0$, réduit l'équation proposée à

$$-z^2du + \frac{z^2 + 2x^2 + ux}{z}\,u\,dz = 0.$$

Substituant dans cette équation la valeur de du tirée de la précédente et divisant par u^2, on trouve

$$0 = \left[\frac{z^2}{u} + \left(d\frac{x^2}{u} + x\right)\right]dz + z^3\left\{\frac{1}{u}\,d\frac{x^2}{z^2} + e^{\frac{x^2}{z^2}}\,d\left[\frac{1}{z}\,\mathrm{f}\left(\frac{x}{z}\right) + Z\right]\right\},$$

ou, en développant et réduisant,

$$Z\,dz + z\,dZ = 0, \quad \text{d'où} \quad Zz = C;$$

par suite,

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{y - x} = \frac{1}{z}\,e^{\frac{x^2}{z^2}}\left[\mathrm{f}\left(\frac{x}{z}\right) + C\right].$$

V. Si, dans l'équation

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

P, Q, R sont des fonctions homogènes de même degré m en x, y, z, en posant alors

$$x = sz, \quad y = tz, \quad P = Sz^m, \quad Q = Tz^m, \quad R = Uz^m,$$

S, T, U étant des fonctions de s et de t, l'équation prendra la forme

$$\frac{dz}{z} + \frac{S\,ds + T\,dt}{Ss + Tt + U} = 0,$$

où les variables sont séparées [1003]. On peut appliquer cette méthode aux trois exemples précédents.

1013. Si la condition d'intégrabilité n'est pas vérifiée, alors, en éliminant [1010] la variable z entre les équations (15) et (16), la variable x ne disparaîtra pas en même temps que z, et l'on ne pourra plus obtenir l'intégrale de l'équation (1) sous forme d'une relation unique entre x, y, z et une constante arbitraire. Il faut alors [1006] établir entre x, y, z une relation arbitraire, pour ramener l'équation (1) au cas d'une seule variable indépendante.

On peut prendre pour cette relation l'équation

$$(15) \qquad z = f(x, y, Y).$$

On aura alors, en différentiant,

$$dz = p\,dx + q\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial Y}\,dY.$$

On a d'ailleurs identiquement, d'après ce que nous avons vu,

$$p\,dx = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx.$$

Retranchant cette égalité de la précédente, il vient

$$q\,dy = \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial Y}\,dY.$$

Or la condition pour que l'équation différentielle (1) soit véri-

fiée, c'est que l'on ait $dz = p\,dx + q\,dy$, condition à laquelle on satisfera, si l'on pose

$$q = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{dY}{dy},$$

c'est-à-dire si l'on prend pour seconde équation entre x, y, z l'équation (16), qui nous avait servi, dans le cas d'intégrabilité, à déterminer la fonction Y.

Lors donc que la condition d'intégrabilité ne sera pas vérifiée, on commencera encore le calcul comme nous l'avons indiqué au nº **1012**. Après avoir trouvé l'intégrale (18) de l'équation $P\,dx + R\,dz = 0$, on différentiera partiellement cette intégrale par rapport à y, en laissant x constant et remplaçant $\frac{\partial z}{\partial y}$ par $-\frac{Q}{R}$. On aura alors les deux relations

$$(19)\qquad F(x, y, z, Y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{dY}{dy}\frac{\partial F}{\partial Y} = 0,$$

contenant la fonction arbitraire Y de la variable y, et représentant une infinité de courbes dont les équations satisferont chacune à l'équation différentielle (7).

Par ce moyen, l'intégration de l'équation $P\,dx + R\,dz = 0$ peut se faire avant que l'on ait choisi la fonction arbitraire Y.

1014. Si, au lieu d'une fonction arbitraire d'une seule variable y, on voulait introduire dans les équations intégrales une fonction arbitraire d'une fonction donnée u des trois variables x, y, z, on exprimerait une de celles-ci, x par exemple, en fonction des deux autres et de u, et, si l'on a $dx = l\,du + m\,dy + n\,dz$, l'équation (1) deviendra

$$lp\,du + (mp + q)\,dy + (np - 1)\,dz = 0.$$

Si maintenant $f(u, y, z, U) = 0$ est l'intégrale de l'équation

$$(mp + q)\,dy + (np - 1)\,d_y z = 0,$$

on n'aura qu'à joindre à cette intégrale sa dérivée partielle par rapport à u,

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{lp}{1 - np}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial U}\frac{dU}{du} = 0,$$

pour avoir un système d'intégrales dépendant d'une fonction arbitraire d'une fonction donnée des trois variables.

1015. On peut encore se proposer de déterminer la fonction arbitraire Y des équations (19) de manière que les lignes représentées par ces équations se trouvent sur une surface donnée

$$(20) \qquad \varphi(x, y, z) = 0.$$

On éliminera alors x et z entre les équations (19) et (20), et il restera une équation entre y, Y et $\frac{dY}{dy}$, d'où l'on tirera par intégration la valeur de la fonction Y.

On aurait pu, dans ce cas, plus simplement, éliminer d'abord z et dz de l'équation (7), au moyen de l'équation (20) et de sa différentielle, et intégrer ensuite l'équation résultante entre x, y et $\frac{dy}{dx}$.

1016. *Exemple.* — On propose de déterminer une surface conique dont le sommet soit en un point donné (a, b, c), et qui soit de révolution autour de l'axe des z.

En écrivant que le plan tangent en un point quelconque de la surface passe au point (a, b, c) et que la normale rencontre toujours l'axe des z, on a les deux équations

$$(x-a)\frac{\partial z}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial z}{\partial y} = z - c, \quad y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z-c}{x(x-a)+y(y-b)},$$

équations dont l'ensemble équivaut à l'équation aux différentielles totales

$$(1) \qquad \frac{dz}{z-c} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x(x-a)+y(y-b)}.$$

La condition d'intégrabilité, qui se réduit à

$$bx = ay,$$

ne peut être vérifiée identiquement que si l'on a $a = b = 0$ ou si le sommet donné est sur l'axe des z, et il était aisé de le prévoir

a priori, autant du moins qu'il s'agit de trouver une surface dont l'équation doit renfermer une constante arbitraire.

Cependant l'équation est vérifiée en égalant à zéro le facteur $z-c$; car, en posant, pour abréger,

$$v = x(x-a) + y(y-b),$$

si l'on écrit l'équation (1) sous la forme

$$dz = \frac{(z-c)x}{v}dx + \frac{(z-c)y}{v}dy,$$

la condition d'intégrabilité devient

$$-\frac{(z-c)x}{v^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{x}{v}\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{(z-c)y}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{y}{v}\frac{\partial z}{\partial x},$$

ou, en mettant pour $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ leurs valeurs données par l'équation différentielle,

$$(z-c)(bx-ay) = 0.$$

La condition $z-c=0$ n'est pas vérifiée *identiquement*, mais elle s'accorde avec l'équation différentielle. On a donc une solution *unique* de la question dans le sens de l'énoncé [1006], le plan $z=c$ étant le seul cône de sommet (a, b, c) qui puisse être regardé comme étant de révolution autour de l'axe des z.

Pour avoir maintenant une série de courbes satisfaisant à l'équation (1), intégrons d'abord l'équation

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x(x-a)+y(y-b)} = 0,$$

ce qui donne

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant une fonction arbitraire de z. On y joindra [1013] l'équation

$$2x\frac{dx}{dz} + 2y\frac{dy}{dz} = \varphi'(z),$$

où l'on remplacera $\frac{dx}{dz}$ par $\frac{v}{(z-c)x}$, $\frac{dy}{dz}$ par $\frac{v}{(z-c)y}$, et l'on aura

l'équation

$$x(x-a)+y(y-b)=\frac{1}{2}(z-c)\varphi'(z), \tag{3}$$

qui, jointe à l'équation (2), représentera la série de courbes cherchée. Ce sont les lignes de contact d'une surface de révolution (2) autour de l'axe des z avec un cône circonscrit à cette surface et ayant pour sommet le point (a, b, c).

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

§ I.

FORMATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES PAR L'ÉLIMINATION DES FONCTIONS ARBITRAIRES.

1018. Soit $u = f(x, y, z)$ une fonction *donnée* des variables x, y, z, et supposons qu'on établisse entre ces trois variables une relation de la forme

$$(1) \qquad F[x, y, z, \varphi(u)] = 0,$$

F désignant une fonction *donnée*, φ une fonction arbitraire. L'équation (1) pourra encore se mettre sous la forme

$$(2) \qquad \varphi(u) = \mathrm{f}(x, y, z) = v,$$

v étant, comme u, une fonction *donnée* de x, y, z, ou encore sous la forme

$$(3) \qquad \Phi(u, v) = 0,$$

Φ étant encore un signe de fonction arbitraire. Sous ces diverses formes, on peut dire que l'équation (1), (2) ou (3) établit une relation arbitraire entre deux fonctions *données* de x, y, z.

Cette équation (1), (2) ou (3) représente une infinité de surfaces, composant une même *famille*, laquelle est caractérisée par la nature des fonctions données u et F ou v, et les diverses surfaces de cette famille diffèrent entre elles par la nature de la fonction arbitraire φ ou Φ.

1019. On peut maintenant, au moyen de la différentiation, éliminer la fonction arbitraire φ ou Φ, et tirer de la relation donnée entre x, y, z, qui renferme une fonction arbitraire, une relation sans fonction arbitraire, exprimant une propriété commune à toutes les surfaces qui appartiennent à la famille considérée.

Désignons, pour abréger, par p, q les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$; et convenons, comme nous l'avons déjà fait [1005], de représenter par $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, par exemple, la dérivée partielle par rapport à x d'une fonction u de x, y, z, prise en y faisant varier x, non-seulement en tant que cette variable entre explicitement, mais encore en tant qu'elle entre implicitement par le moyen de z.

En différentiant l'équation (3) par rapport à x, puis par rapport à y, il viendra

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0,$$

d'où l'on tire, en éliminant le rapport $\frac{\partial \Phi}{\partial u} : \frac{\partial \Phi}{\partial v}$, l'équation

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

le terme multiplié par pq s'évanouissant identiquement. On a donc, pour toutes les surfaces de la même famille, une même relation (5) entre les variables indépendantes x, y, la fonction z et ses deux dérivées partielles p, q. Une telle relation s'appelle une *équation aux dérivées partielles*. De plus, cette équation est du

premier ordre, parce qu'il n'y entre que des dérivées partielles du premier ordre, et elle est *linéaire,* parce que ces dérivées partielles n'y entrent qu'au premier degré et sans être multipliées entre elles.

1020. Réciproquement, l'équation (5), que nous avons déduite comme conséquence de l'équation (2) ou (3), entraîne elle-même cette dernière comme conséquence. En effet, l'équation (5), qui peut toujours se ramener à la forme (4), s'écrit aussi sous la forme

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy}{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) dy} = \frac{du}{dv} = \mathrm{W},$$

W étant la valeur commune des rapports précédents, quelle qu'elle soit. Donc l'équation aux dérivées partielles (5) équivaut à l'établissement entre u et v d'une relation de la forme

$$du = \mathrm{W}\, dv,$$

qui devra être vérifiée identiquement si l'on donne à z une valeur qui satisfasse identiquement à l'équation (5). Or, d'après ce que nous avons démontré [778], cette relation exige que les quantités u et v soient fonctions l'une de l'autre lorsqu'on y remplace z par sa valeur en x, y. Donc il doit exister entre u et v une relation arbitraire, telle que (2) ou (3), dont rien d'ailleurs ne particularise la forme. Par conséquent, toute fonction z des variables indépendantes x, y qui satisfait identiquement à l'équation (5) doit être déterminée en x et y par une relation de la forme (2) ou (3), c'est-à-dire par une relation arbitraire entre les fonctions déterminées u, v de x, y, z.

Nous faisons ici abstraction des solutions étrangères ou singulières qui pourraient s'introduire avec des facteurs communs dans le premier membre de l'équation (5). Nous laisserons de côté ce genre de solutions, qui donnerait lieu à des recherches analogues à celles que nous avons faites pour les équations du premier ordre entre deux variables, si ce n'est qu'elles seraient plus compliquées.

On pourrait aussi traiter les questions des deux paragraphes précédents par la considération des déterminants fonctionnels, comme nous allons le voir pour un cas plus étendu.

1021. Soit, en général, t une fonction des n variables indépendantes $x, y, z, \ldots$, et supposons que

$$u, v, w, \ldots$$

soient n fonctions données des $n+1$ variables

$$t, x, y, z, \ldots.$$

Si l'on pose entre les n fonctions $u, v, w, \ldots$ une relation arbitraire

$$(6) \qquad \Phi(u, v, w, \ldots) = 0,$$

on pourra de cette relation tirer une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre de la fonction t, équation qui ne contiendra plus la fonction arbitraire Φ.

Posons, en effet, pour abréger l'écriture,

$$p = \frac{\partial t}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial t}{\partial y}, \quad \ldots, \quad u'_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u'_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \ldots.$$

En différentiant successivement l'équation (6) par rapport à $x, y, z, \ldots$, il viendra

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}(u'_x + pu'_t) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}(v'_x + pv'_t) + \ldots = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}(u'_y + qu'_t) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}(v'_y + qv'_t) + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

L'élimination de $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}, \ldots$ entre ces équations donne la relation

$$(7) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} u'_x + pu'_t & v'_x + pv'_t & \ldots \\ u'_y + qu'_t & v'_y + qv'_t & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Or, le déterminant

$$\begin{vmatrix} a + p\alpha & b + p\beta & \ldots \\ a' + q\alpha' & b' + q\beta & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

peut se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & \dots \\ -p+p & a+p\alpha & b+p\beta & \dots \\ -q+q & a'+q\alpha & b'+q\beta & \dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \end{vmatrix},$$

et, en ajoutant à la deuxième, à la troisième, ... ligne horizontale les produits de la première ligne horizontale respectivement par $-p, -q, \dots$, le déterminant se réduit à

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & \dots \\ -p & a & b & \dots \\ -q & a' & b' & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

D'après cela, le déterminant Δ ci-dessus deviendra

$$(7)' \qquad \begin{vmatrix} 1 & u'_t & v'_t & \dots \\ -p & u'_x & v'_x & \dots \\ -q & u'_y & v'_y & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Donc l'équation $\Delta = 0$ devient, en développant,

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} u'_x & v'_x & \dots \\ u'_y & v'_y & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} u'_t & v'_t & \dots \\ u'_y & v'_y & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} - q \begin{vmatrix} u'_t & v'_t & \dots \\ u'_x & v'_x & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \dots = 0,$$

équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre de la fonction t.

1022. On peut arriver plus directement à l'équation (7) par la propriété fondamentale des déterminants fonctionnels [316].

Si l'on remet, dans l'équation (6), à la place de t sa valeur en x, y, z, ..., tirée de cette même équation, cette équation se changera en une relation identique entre les fonctions u, v, ..., exprimées en x, y, ... Donc, après le remplacement de t par sa valeur, ces fonctions u, v, ... ne sont plus indépendantes entre elles, et, par suite, leur déterminant fonctionnel est identiquement nul. Donc, lorsqu'on met pour t sa valeur en x, y, ... tirée de (6), l'équation (7) ou (8) doit être identiquement vérifiée.

Réciproquement, si, pour une valeur convenable de t en x, y, ... l'équation (8) ou (7) est identiquement vérifiée, c'est que la substitution de cette valeur dans u, v, ... fait évanouir le déterminant fonctionnel de ces fonctions par rapport à x, y, ..., et que, par suite, ces fonctions cessent d'être indépendantes entre elles. Donc, pour cette valeur de t, il doit s'établir une relation identique quelconque entre u, v, ..., de sorte que t est une solution d'une équation obtenue en posant entre u, v, ... une relation quelconque. Nous venons de voir, d'ailleurs, que l'équation (8) ne dépend nullement de la forme de cette relation, laquelle est, par conséquent, entièrement arbitraire.

Donc les deux relations (6) et (8) sont une conséquence l'une de l'autre, et, partant, elles sont entièrement équivalentes entre elles.

1023. *Exemple.* — Soit la relation

$$\Phi\left(\frac{t}{x^\mu}, \quad \frac{y}{x}, \quad \frac{z}{x}, \quad \cdots\right) = 0,$$

par laquelle t est défini comme une fonction homogène du degré μ des variables x, y, z, ... Ici u, v, w, ... sont respectivement les expressions $\frac{t}{x^\mu}$, $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$, $\cdots$, et, par suite, l'équation (7') devient

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{x^\mu} & 0 & 0 & \cdots \\ -p & -\frac{\mu t}{x^{\mu+1}} & -\frac{y}{x^2} & -\frac{z}{x^2} & \cdots \\ -q & 0 & \frac{1}{x} & 0 & \cdots \\ -r & 0 & 0 & \frac{1}{x} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$\mu t = px + qy + rz + \ldots,$$

équation qui exprime la propriété générale de la famille des fonctions homogènes, connue sous le nom de *théorème d'Euler*

[322]. On voit, par la réciproque du numéro précédent, que cette propriété est nécessaire et suffisante pour caractériser ces fonctions.

1024. Si la relation donnée, au lieu d'une seule fonction arbitraire $\varphi(u)$, contenait deux fonctions arbitraires $\varphi(u)$, $\chi(v)$ de fonctions données u, v des variables x, y, z, en sorte qu'elle fût de la forme

$$F[x, y, z, \varphi(u), \chi(v)] = 0,$$

F désignant une fonction *donnée,* en différentiant cette équation une première fois par rapport à x et par rapport à y, on obtiendrait deux équations de plus, en tout trois, et deux quantités de plus à éliminer, $\varphi'(u)$, $\chi'(v)$, en tout quatre. En passant aux dérivées du second ordre, on aurait trois équations de plus et deux quantités de plus à éliminer, $\varphi''(u)$, $\chi''(v)$, soit en tout six équations et six quantités à éliminer, de façon que l'élimination ne pourra se faire que dans des cas particuliers. Il faudra donc généralement aller jusqu'aux dérivées du troisième ordre, ce qui portera à huit le nombre des quantités à éliminer et à dix celui des équations. On pourra donc combiner ces équations de plusieurs manières différentes et en tirer différentes équations aux dérivées partielles du troisième ordre, délivrées des fonctions arbitraires et procédant toutes de la même équation primitive.

Généralement, si l'on a n fonctions arbitraires portant chacune sur une fonction donnée de x, y, z, en différentiant l'équation jusqu'à ce que l'on arrive aux dérivées de l'ordre m, on aura

$$(m+1)n$$

quantités à éliminer entre

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

équations. Pour que l'élimination soit possible, il suffit que l'on ait $\frac{m+2}{2} > n$, condition qui sera remplie si l'on prend

$$m = 2n - 1.$$

Tel est, en général, l'ordre de l'équation aux dérivées partielles résultant de l'élimination des n fonctions arbitraires. Le nombre des quantités à éliminer sera alors $2n^2$, et celui des équations

$2n^2+n$. En combinant celles-ci par groupes de $2n^2+1$, on pourra faire de diverses manières l'élimination des fonctions arbitraires.

On voit que, pour le cas même le plus simple de deux variables indépendantes, la relation entre l'ordre de l'équation différentielle et le nombre des arbitraires de l'équation primitive est loin d'être aussi simple que dans le cas analogue des équations à une seule variable indépendante.

Si, au lieu d'une fonction arbitraire $\varphi(u)$ d'une seule fonction donnée u, on avait, dans l'équation primitive entre x, y, z, une fonction arbitraire $\varphi(u, v)$ de deux fonctions données, l'élimination de cette fonction entre l'équation primitive et ses dérivées partielles ne pourrait plus se faire, chaque nouvelle différentiation introduisant précisément autant de nouvelles quantités à éliminer que de nouvelles équations.

§ II.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DES PRINCIPALES FAMILLES DE SURFACES.

1025. I. *Surfaces cylindriques.* — Soient les équations d'une droite

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

a et b étant des coefficients constants, α et β des paramètres variables. Pour qu'une ligne engendre une surface, il faut que sa position ne puisse varier que dans un seul sens déterminé, et par suite que ses équations ne renferment qu'un seul paramètre variable indépendant. Donc, pour que la droite ci-dessus engendre une surface, il faut qu'entre les deux paramètres α, β il existe une relation quelconque

$$\beta = \varphi(\alpha). \tag{1}$$

Dès lors, les équations de la génératrice d'une surface cylindrique seront

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \varphi(\alpha), \tag{2}$$

et, en éliminant α entre ces deux équations, on aura, pour l'équation de la surface,

$$y - bz = \varphi(x - az), \tag{3}$$

équation générale des surfaces cylindriques parallèles à la droite

(4) $$x = az, \quad y = bz.$$

En différentiant l'équation (3) par rapport à x et à y, il vient

$$\begin{aligned} -bp &= (1 - ap)\,\varphi'(x - az), \\ 1 - bq &= \quad -aq\;\varphi'(x - az), \end{aligned}$$

d'où, en éliminant $\varphi'(x - az)$,

(5) $$\frac{-bp}{1 - bq} = \frac{1 - ap}{-aq},$$

ou, en réduisant,

(6) $$ap + bq = 1,$$

équation aux dérivées partielles de toutes les surfaces en question.

On aurait pu obtenir directement cette équation en exprimant que, dans les surfaces cylindriques parallèles à la droite (4), le plan tangent est toujours parallèle à cette droite.

Réciproquement, cette propriété du plan tangent, exprimée par l'équation (6) ou (5), suffit pour définir la surface (3). En effet, l'équation (5) peut s'écrire

$$\frac{-bp}{1 - ap} = \frac{1 - bq}{-aq}, \quad \text{ou} \quad \frac{d_x(y - bz)}{d_x(x - az)} = \frac{d_y(y - bz)}{d_y(x - az)},$$

ou, en désignant par ω la valeur commune des deux rapports précédents,

$$d_x(y - bz) = \omega d_x(x - az), \quad d_y(y - bz) = \omega d_y(x - az),$$

d'où l'on tire, par addition,

$$d(y - bx) = \omega d(x - az).$$

Donc, d'après ce que nous avons démontré [778], les deux fonctions $x - az$, $y - bz$ doivent dépendre l'une de l'autre, ce qui donne l'équation (3).

1026. On peut encore présenter le même calcul sous la forme suivante. Soient

$$\frac{x - \alpha}{a} = \frac{y - \beta}{b} = \frac{z - \gamma}{c}$$

les équations de la génératrice d'un cylindre,

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

les équations de la courbe directrice sur laquelle s'appuie la génératrice dans son mouvement. En éliminant α, β, γ entre les quatre équations précédentes, ou, ce qui revient au même, en éliminant α entre les deux équations

$$f\left[\alpha, y - \frac{b(x-\alpha)}{a}, \quad z - \frac{c(x-\alpha)}{a}\right] = 0,$$

$$F\left[\alpha, y - \frac{b(x-\alpha)}{a}, \quad z - \frac{c(x-\alpha)}{a}\right] = 0,$$

on parviendra à une équation entre $y - \frac{bx}{a}$ et $z - \frac{cx}{a}$, de la forme

$$\Phi\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}, \quad \frac{z}{c} - \frac{x}{a}\right) = 0,$$

qui n'est autre chose que l'équation (3).

On peut encore écrire les équations de la directrice sous la forme

$$\beta = \varphi(\alpha), \quad \gamma = \chi(\alpha),$$

et alors les équations de la génératrice deviennent

$$\frac{\varphi(\alpha)}{b} - \frac{\alpha}{a} = \frac{y}{b} - \frac{x}{a}, \quad \frac{\chi(\alpha)}{c} - \frac{\alpha}{a} = \frac{z}{c} - \frac{x}{a},$$

et l'élimination de α entre ces deux équations donne, comme plus haut, une relation entre $\frac{y}{b} - \frac{x}{a}$ et $\frac{z}{c} - \frac{x}{a}$.

On pourrait encore, au moyen des calculs du n° 1025, résoudre le problème de faire passer une surface cylindrique parallèle à la droite (4) par une courbe directrice donnée

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0.$$

Entre ces équations et les équations de la génératrice

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

éliminons x, y, z. Nous obtiendrons une relation entre α et β, qui

fera connaître la fonction φ qu'il faudra substituer dans l'équation (3) de la surface cylindrique.

Pour trouver le cylindre parallèle à une droite donnée (4) et circonscrit à une surface donnée

$$F(x, y, z) = 0,$$

on cherchera les points de la surface pour lesquels le plan tangent est parallèle à la droite (5), ce qui donne, à cause de

$$p = -\frac{F'(x)}{F'(z)}, \quad q = -\frac{F'(y)}{F'(z)},$$

la condition

$$aF'(x) + bF'(y) + F'(z) = 0.$$

Cette condition, jointe à l'équation de la surface, déterminera une courbe directrice de la surface cylindrique, et l'on sera ramené alors au cas que nous venons de traiter.

1027. Étant donnée l'équation d'une surface

$$(7) \qquad F(x, y, z) = 0,$$

on propose de reconnaître si cette surface est cylindrique.

Il faut pour cela qu'en tirant de cette équation les valeurs de p et de q, et les portant dans l'équation (6), qui devient

$$(8) \qquad aF'(x) + bF'(y) + F'(z) = 0,$$

on puisse déterminer a et b de telle manière que cette condition ait lieu pour tous les points de la surface. Si cette surface est algébrique, l'équation (8), étant de degré inférieur à (7), ne pourra subsister en tout point de la surface que si elle est identique. En identifiant donc le premier membre de (8) à zéro, puis éliminant a et b entre les équations obtenues, on aura les équations de condition qui devront avoir lieu entre les coefficients de l'équation (7) pour que celle-ci représente un cylindre.

Si l'on suppose, par exemple, que l'équation (7) soit l'équation du second degré

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

en exprimant que la condition (8) a lieu identiquement, on aura les équations

$$\begin{aligned} A\ a + B'' b + B' &= 0, \\ B'' a + A' b + B\ &= 0, \\ B' a + B\ b + A'' &= 0, \\ C\ a + C' b + C'' &= 0. \end{aligned}$$

En écrivant que ces équations sont compatibles trois à trois, on aura les conditions suivantes, dont deux quelconques sont des conséquences des deux autres :

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = 0, \quad \delta_1 = -\begin{vmatrix} B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} B' & B & A'' \\ C & C' & C'' \\ A & B'' & B' \end{vmatrix} = 0, \quad \delta_3 = -\begin{vmatrix} C & C' & C'' \\ A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \end{vmatrix} = 0.$$

Les quantités δ, δ_1, δ_2, δ_3 sont les déterminants mineurs du discriminant Δ de l'équation du second degré, et, par suite, ce discriminant s'annule lui-même. Ces équations sont celles que l'on obtiendrait en écrivant que les expressions des trois coordonnées du centre de la surface se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$.

1028. II. *Surfaces coniques.* — Soient

$$(1) \qquad x - a = \alpha(z - c), \quad y - b = \beta(z - c)$$

les équations de la génératrice, a, b, c étant les coordonnées constantes du sommet, et α, β des paramètres variables. Pour que la génératrice décrive une surface, il faudra [1025] qu'il existe entre α et β une relation quelconque

$$(2) \qquad \beta = \varphi(\alpha).$$

Alors les équations de la génératrice deviendront

$$(3) \qquad x - a = \alpha(z - c), \quad y - b = \varphi(\alpha)(z - c).$$

En éliminant α entre ces équations, on a l'équation générale des

surfaces coniques de sommet (a, b, c),

$$(4) \qquad \frac{y-b}{z-c} = \varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right),$$

ce qui exprime une relation homogène quelconque entre $x-a$, $y-b$, $z-c$.

En différentiant l'équation (4) successivement par rapport à x et à y, et éliminant $\varphi'\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$, on a l'équation aux dérivées partielles des surfaces coniques de sommet (a, b, c),

$$(5) \qquad z-c = p(x-a) + q(y-b),$$

équation qui exprime que le plan tangent en un point quelconque de la surface conique passe toujours par le point (a, b, c).

Nous verrions, absolument comme dans le cas des surfaces cylindriques, comment on peut déterminer un cône de sommet donné, passant par une courbe directrice donnée, ou circonscrit à une surface donnée.

Pour reconnaître si une équation donnée

$$(6) \qquad F(x, y, z) = 0$$

représente un cône, transportons d'abord l'origine au sommet inconnu (a, b, c), en posant

$$x-a = x', \quad y-b = y', \quad z-c = z'.$$

L'équation (5), qui devient

$$z' = \frac{\partial z'}{\partial x'} x' + \frac{\partial z'}{\partial y'} y',$$

exprime que z' est une fonction homogène du premier degré de x' et de y'. Donc le transport de l'origine au point (a, b, c) doit changer la relation $F(x'+a, y'+b, z'+c) = 0$ en une équation homogène entre x', y', z'. Il faut donc que l'on puisse, en choisissant convenablement a, b, c, faire disparaître tous les termes de l'équation autres que ceux du degré le plus élevé.

Si l'équation est du second degré, elle devient, en désignant par $F_2(x, y, z)$ l'ensemble des termes du second degré,

$$F_2(x', y', z') + x'F'(a) + y'F'(b) + z'F'(c) + F(a, b, c) = 0.$$

Il faut donc, pour que cette surface soit un cône, que l'on ait

$$F'(a) = 0, \quad F'(b) = 0, \quad F'(c) = 0, \quad F(a, b, c) = 0.$$

Donc d'abord a, b, c sont les coordonnées du centre, et le discriminant δ des termes du second degré ne doit pas être nul. Ensuite, par la substitution des valeurs ainsi trouvées de a, b, c, $F(a, b, c)$ devient égal à $\frac{\Delta}{\delta}$, Δ étant le discriminant de la fonction F. Donc les conditions pour que $F(x, y, z) = 0$ représente un cône sont

$$\delta \text{ différent de zéro}, \quad \Delta = 0.$$

On peut encore présenter le calcul autrement, en se servant de l'équation aux dérivées partielles (5). Si $F(x, y, z) = 0$ est l'équation de la surface conique, l'équation (5) pourra s'écrire sous la forme

$$(x - a) F'(x) + (y - b) F'(y) + (z - c) F'(z) = 0.$$

En supposant maintenant que $F(x, y, z)$ soit un polynôme entier, et désignant par F_k l'ensemble des termes du degré k, cette équation pourra [644] être remplacée par la suivante,

$$(7) \quad aF'(x) + bF'(y) + cF'(z) + F_{m-1} + 2F_{m-2} + \ldots + mF_0 = 0,$$

m étant le degré de l'équation $F = 0$. Cette relation, étant de degré inférieur au degré de la surface et devant avoir lieu en chaque point, ne pourra être qu'une identité. Donc la surface sera un cône si l'on peut déterminer a, b, c de manière que le premier membre de l'équation (7) s'évanouisse identiquement. En appliquant cette méthode aux surfaces du second degré, on retrouve les mêmes résultats que ci-dessus.

1029. III. *Surfaces conoïdes.* — On entend par surface *conoïde* une surface engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant constamment sur une droite fixe (*directrice*) et en restant parallèle à un plan fixe (*plan directeur*). Soient

$$(1) \qquad \xi = A\zeta + a, \quad \eta = B\zeta + b$$

les équations de la directrice, et

$$(2) \qquad lx + my + nz = 0$$

celle du plan directeur. Les équations de la génératrice seront de la forme

$$(3) \qquad x - \xi = \alpha(z - \zeta), \quad y - \eta = \beta(z - \zeta),$$

α et β étant soumis à la condition de parallélisme de la génératrice avec le plan (2),

$$(4) \qquad l\alpha + m\beta + n = 0.$$

En éliminant, au moyen des équations (1) et (2), les trois paramètres variables ξ, η, β, il en reste deux, ζ et α, indépendants entre eux, et entre lesquels on doit établir, par conséquent, une relation

$$(5) \qquad \zeta = \varphi(\alpha).$$

Or, des équations (3), qui deviennent, par l'élimination de ξ et de η,

$$x - A\zeta - a = \alpha(z - \zeta), \quad y - B\zeta - b = \beta(z - \zeta),$$

ou, en posant $x - a - Az = X$, $y - b - Bz = Y$,

$$X = (A - \alpha)(\zeta - z), \quad Y = (B - \beta)(\zeta - z),$$

on tire, en ayant égard à l'équation (4) et faisant $Al + Bm + n = k$,

$$\zeta - z = \frac{X}{A - \alpha} = \frac{Y}{B - \beta} = \frac{lX + mY}{k}.$$

Donc

$$\zeta = \frac{lX + mY + kz}{k} = \frac{l(x - a) + m(y - b) + nz}{k},$$

$$\frac{1}{A - \alpha} = \frac{l}{k} + \frac{m}{k}\frac{Y}{X}.$$

Mais ζ, devant être une fonction de α, peut aussi être considéré comme étant une fonction de $\frac{1}{A - \alpha} - \frac{l}{k}$ ou une fonction de $\frac{Y}{X}$. On pourra donc remplacer l'équation (5) par l'équation équivalente

$$(6) \qquad l(x - a) + m(y - b) + nz = \chi\left(\frac{Y}{X}\right),$$

qui est l'équation générale des surfaces conoïdes.

En la différentiant tour à tour par rapport à x et à y, on en tire

$$l - np = \chi'\left(\frac{Y}{X}\right) \frac{[A(y-b) - B(x-a)]p - Y}{X^2},$$

$$m - nq = \chi'\left(\frac{Y}{X}\right) \frac{[A(y-b) - B(x-a)]q + X}{X^2},$$

d'où l'on obtient, pour l'équation aux dérivées partielles des surfaces conoïdes,

$$(7)\quad [m(AY - BX) + nX]p - [l(AY - BX) - nY]q = lX + mY.$$

1030. On peut encore se représenter la surface conoïde comme engendrée par l'intersection d'un plan parallèle au plan directeur (2),

$$lx + my + nz = \theta,$$

avec un plan passant par la directrice (1),

$$y - b - Bz = \lambda(x - a - Az), \quad \text{ou} \quad Y = \lambda X.$$

En établissant entre les paramètres λ et θ une liaison $\theta = \psi(\lambda)$, on aura, par l'élimination de ces paramètres, l'équation de la surface

$$(8)\qquad lx + my + nz = \psi\left(\frac{Y}{X}\right),$$

qui n'est autre chose que l'équation (6), dans laquelle on aurait négligé, comme on le peut évidemment, la partie constante $-la - mb$ du premier membre.

L'équation aux dérivées partielles (7) peut s'obtenir directement. La génératrice étant contenue à la fois dans le plan tangent à la surface,

$$(a)\qquad \zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

et dans un plan mené par le point (x, y, z) parallèlement au plan directeur,

$$(b)\qquad l(\xi - x) + m(\eta - y) + n(\zeta - z) = 0,$$

et cette intersection devant rencontrer la droite (1), il faudra que les quatre équations (1), (a), (b) subsistent en même temps. L'élimination de ξ, η, ζ entre ces équations conduit à l'équation (7).

1031. Supposons, pour plus de simplicité, que l'on ait pris la directrice (1) pour axe des z, et le plan directeur (2) pour plan des xy. Alors les quantités A, B, a, b, l, m seront toutes nulles; les équations de la génératrice pourront se mettre sous la forme

$$y = \gamma x, \quad z = \zeta,$$

avec la condition

$$\zeta = \varphi(\gamma),$$

ou, en éliminant γ et ζ,

$$(9) \qquad z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

En éliminant la fonction arbitraire φ, on a l'équation aux dérivées partielles

$$(10) \qquad px + qy = 0,$$

qui exprime que z doit être une fonction homogène du degré zéro de x et de y.

Géométriquement, l'équation (10) fait voir que l'équation du plan tangent

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

est vérifiée en posant

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y}, \quad \zeta = z,$$

c'est-à-dire que ce plan contient une horizontale menée par le point de contact et rencontrant l'axe des z.

Si l'on veut faire passer la surface (9) par une courbe directrice dont les équations soient

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0,$$

éliminons x, y, z entre ces deux équations et celles de la génératrice, ou, ce qui est la même chose, éliminons x entre les deux équations

$$f(x, \gamma x, \zeta) = 0, \quad F(x, \gamma x, \zeta) = 0.$$

On obtiendra ainsi une relation entre γ et ζ, qui fera connaître la forme de la fonction φ que l'on devra substituer dans l'équation (9) de la surface.

1032. *Exemples.* — 1° La directrice est une droite

$$x = gz + h, \quad y = g'z + h'.$$

En éliminant x entre les deux équations

$$x = g\zeta + h, \quad \gamma x = g'\zeta + h',$$

il vient

$$\gamma = \frac{g'\zeta + h'}{g\zeta + h},$$

d'où, en mettant pour γ et ζ leurs valeurs $\frac{y}{x}$, z,

$$\frac{y}{x} = \frac{g'z + h'}{gz + h},$$

ou

$$(gy - g'x)z + hy - h'x = 0,$$

équation d'un paraboloïde hyperbolique.

2° La directrice est une ellipse dont le plan est vertical et qui a pour équations

$$x = a, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

On a ici $\gamma = \frac{y}{a}$, et, par suite, la relation entre γ et ζ sera

$$\gamma^2 \frac{a^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1,$$

ce qui donne, pour l'équation de la surface cherchée,

$$\frac{a^2 y^2}{b^2 x^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Cette surface est connue sous le nom de *voûte d'arête en tour ronde,* et l'ellipse directrice porte le nom de *cintre*.

Si l'on pose

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}, \quad \text{ou} \quad k = \frac{ac}{b}, \quad a = \frac{bk}{c},$$

la section de la surface par le plan $x = k$ sera un cercle que l'on pourra prendre pour cintre à la place de l'ellipse donnée, et l'équa-

tion de la surface deviendra alors

$$k^2 \frac{y^2}{x^2} + z^2 = c^2.$$

3° Prenons pour directrice l'hélice

$$x = a \cos \frac{z}{b}, \quad y = a \sin \frac{z}{b}.$$

En faisant $y = \gamma x$, $z = \zeta$, il vient

$$\gamma = \operatorname{tang} \frac{\zeta}{b};$$

on a donc, pour l'équation de l'hélicoïde gauche,

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \frac{z}{b}.$$

1033. IV. *Surfaces de révolution.* — Une surface de révolution peut être considérée comme engendrée par un cercle dont le plan se meut parallèlement à lui-même, tandis que le centre se meut sur une droite perpendiculaire à ce plan, et que le rayon varie de manière que la circonférence s'appuie constamment sur une courbe donnée. Le cercle variable s'appelle un *parallèle* de la surface; la droite lieu des centres est l'*axe de révolution,* et la courbe directrice, lorsqu'elle est située dans un plan passant par l'axe de révolution, prend le nom de *courbe méridienne* ou de *méridien.*

Soient

$$(1) \qquad x = Az + a, \quad y = Bz + b$$

les équations de l'axe de révolution. Le cercle générateur sera donné par l'intersection d'un plan mobile perpendiculaire à l'axe,

$$(2) \qquad Ax + By + z = \alpha,$$

avec une sphère ayant pour centre un point de l'axe, le point (a, b, o) par exemple, et un rayon variable,

$$(3) \qquad (x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = \beta^2.$$

Il doit exister, de plus, entre les deux paramètres α, β^2, une

relation

$$(4) \qquad \beta^2 = \varphi(\alpha),$$

de sorte que les équations du cercle générateur seront

$$Ax + By + z = \alpha, \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = \varphi(\alpha).$$

En éliminant α entre ces deux équations, on aura, pour l'équation générale des surfaces de révolution autour de l'axe donné (1),

$$(5) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = \varphi(Ax + By + z).$$

Si l'axe de révolution est pris pour axe des z, alors, A, B, a, b étant nuls, l'équation (5) se réduit à

$$x^2 + y^2 = \varphi(z) - z^2,$$

que l'on peut écrire plus simplement

$$(6) \qquad x^2 + y^2 = \chi(z), \quad \text{ou} \quad z = \psi(x^2 + y^2).$$

1034. Si l'on élimine de l'équation (5) la fonction arbitraire φ, on trouvera, en procédant par la méthode générale,

$$(7) \quad (y - b - Bz)p - (x - a - Az)q = B(x-a) - A(y-b).$$

Cette équation s'obtiendrait directement en écrivant que la normale à la surface,

$$\xi - x + p(\zeta - z) = 0, \quad \eta - y + q(\zeta - z) = 0,$$

rencontre constamment l'axe de révolution

$$\xi = A\zeta + a, \quad \eta = B\zeta + b,$$

ce qui a lieu évidemment pour toute surface de révolution. Et réciproquement, en raisonnant comme au n° 1020, on verrait que cette propriété peut servir de définition aux surfaces de révolution, qui sont les seules surfaces dans lesquelles la normale rencontre constamment une droite fixe.

Si l'axe de révolution est pris pour axe des z, l'équation (7) se réduit à

$$(8) \qquad py - qx = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{p}{x} = \frac{q}{y}.$$

1035. Supposons que l'on donne les équations

$$(9) \qquad f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0$$

de la courbe directrice ou méridienne. Entre les équations (2), (3) et (9) on éliminera x, y, z, et l'on aura ainsi la forme de la relation (4) entre α et β^2, qui déterminera l'équation (5) de la surface cherchée.

Si l'axe de révolution est pris pour axe des z, et que $x = \mathrm{f}(z)$ soit l'équation de la courbe méridienne, l'équation de la surface sera

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \mathrm{f}(z).$$

Exemple. — Supposons que l'on ait pris pour directrice la droite

$$x = mx + \mu, \quad y = nx + \nu.$$

Les équations (2) et (3) donneront

$$(Am + Bn + 1)z + A\mu + B\nu = \alpha,$$
$$(mz + \mu - a)^2 + (nz + \nu - b)^2 + z^2 = \beta^2,$$

d'où, en éliminant z,

$$(m^2 + n^2 + 1)\left(\frac{A\mu + B\nu - \alpha}{Am + Bn + 1}\right)^2$$
$$- 2[m(\mu - a) + n(\nu - b)]\,\frac{A\mu + B\nu - \alpha}{Am + Bn + 1} + (\mu - a)^2 + (\nu - b)^2 = \beta^2.$$

Remplaçant maintenant α et β^2 par les expressions (2) et (3), on a, pour l'équation de la surface cherchée,

$$(m^2 + n^2 + 1)\left[\frac{A(x - \mu) + B(y - \nu) + z}{Am + Bn + 1}\right]^2$$
$$+ 2[m(\mu - a) + n(\nu - b)]\,\frac{A(x - \mu) + B(y - \nu) + z}{Am + Bn + 1}$$
$$+ (\mu - a)^2 + (\nu - b)^2$$
$$= (x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2,$$

équation du second degré qui est celle de l'hyperboloïde gauche de révolution. Si l'axe de révolution est pris pour axe des z, elle se réduit à

$$x^2 + y^2 = (mz + \mu)^2 + (nz + \nu)^2.$$

1036. Étant donnée l'équation d'une surface

$$F(x, y, z) = 0,$$

pour savoir si elle est de révolution, on verra si, pour des valeurs convenables de A, B, a, b, l'équation (7), mise sous la forme

$$(y - b - Bz)\,F'(x) - (x - a - Az)\,F'(y) \\ + [B(x - a) - A(y - b)]\,F'(z) = 0,$$

se vérifie identiquement, soit par elle-même, soit en ayant égard à l'équation de la surface.

Si l'on applique cette méthode à l'équation du second degré [1027], on trouve qu'entre les coefficients des termes du second degré on doit avoir, en général, les relations

$$A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

1037. Nous allons considérer maintenant des surfaces dont les équations dépendent de deux ou plusieurs fonctions arbitraires, et pour lesquelles l'élimination de ces fonctions conduira à des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur au premier.

V. *Surfaces réglées à plan directeur.* — On entend par là les surfaces engendrées par le mouvement d'une droite assujettie à rester parallèle à un plan fixe donné.

Soient

$$(1) \qquad x = \alpha z + \lambda, \quad y = \beta z + \mu$$

les équations de la génératrice, les coefficients variables α, β devant satisfaire à la condition de parallélisme au plan directeur $Ax + By + Cz = 0$,

$$(2) \qquad A\alpha + B\beta + C = 0,$$

relation qui détermine β en fonction de α. A cette relation unique entre les quatre paramètres $\alpha, \beta, \lambda, \mu$, il faut en joindre deux autres, telles que

$$(3) \qquad \lambda = \varphi(\alpha), \quad \mu = \chi(\alpha),$$

pour qu'il reste un seul paramètre indépendant. En faisant donc,

pour abréger, $m = -\frac{A}{B}$, $n = -\frac{C}{B}$, les équations de la génératrice deviendront

$$(4)\qquad x = \alpha z + \varphi(\alpha), \quad y = (m\alpha + n)z + \chi(\alpha).$$

Par l'élimination de α entre ces deux équations, on aurait l'équation générale de la surface ; mais cette élimination ne peut se faire tant que l'on n'a pas particularisé l'une au moins des fonctions φ, χ.

1038. Cherchons maintenant à éliminer les fonctions arbitraires φ, χ, de manière à obtenir l'équation générale aux dérivées partielles de cette famille de surfaces. En considérant α comme une fonction implicite des coordonnées, déterminée par l'une des équations (4), et dépendante par conséquent de l'une ou l'autre des deux fonctions arbitraires, on a, par la différentiation des équations (4),

$$1 - \alpha p = [z + \varphi'(\alpha)]\frac{\partial\alpha}{\partial x}, \qquad -(m\alpha + n)p = [mz + \chi'(\alpha)]\frac{\partial\alpha}{\partial x},$$

$$-\alpha q = [z + \varphi'(\alpha)]\frac{\partial\alpha}{\partial y}, \qquad 1 - (m\alpha + n)q = [mz + \chi'(\alpha)]\frac{\partial\alpha}{\partial y},$$

d'où l'on tire, par division,

$$(5)\qquad \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial x}}{\frac{\partial\alpha}{\partial y}} = \frac{1 - \alpha p}{-\alpha q} = \frac{-(m\alpha + n)p}{1 - (m\alpha + n)q}.$$

Ces égalités donnent d'abord

$$(6)\qquad \alpha p + (m\alpha + n)q = 1,$$

d'où

$$\alpha = \frac{1 - nq}{p + mq}, \quad m\alpha + n = \frac{m + np}{p + mq},$$

et, par suite, les égalités (5) peuvent s'écrire sous la forme

$$(7)\qquad \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial x}}{\frac{\partial\alpha}{\partial y}} = \frac{1 - \alpha p}{-\alpha q} = \frac{(m\alpha + n)q}{-\alpha q} = \frac{m + np}{nq - 1}.$$

Pour éliminer maintenant la fonction arbitraire qui entre encore implicitement par α dans l'équation (6), différentions cette équation par rapport à x et à y, ce qui donne, en désignant, selon l'usage, par r, s, t les dérivées partielles du second ordre de z,

$$\alpha r + (m\alpha + n)s = -(p + mq)\frac{\partial\alpha}{\partial x},$$

$$\alpha s + (m\alpha + n)t = -(p + mq)\frac{\partial\alpha}{\partial y},$$

d'où l'on tire, par division, en ayant égard aux équations (7), et mettant pour α et $m\alpha + n$ leurs valeurs en p et q,

$$\frac{(1 - nq)r + (m + np)s}{(1 - nq)s + (m + np)t} + \frac{m + np}{1 - nq} = 0,$$

ou enfin, en mettant pour m et n leurs valeurs, et réduisant,

$$(8)\qquad (B + Cq)^2 r - 2(A + Cp)(B + Cq)s + (A + Cp)^2 t = 0.$$

Si l'on suppose que l'on ait pris l'axe des z parallèle au plan directeur, on a alors $C = 0$, et l'équation précédente devient une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre, à coefficients constants,

$$(9)\qquad B^2 r - 2ABs + A^2 t = 0.$$

1039. On peut diriger le calcul autrement, de manière à obtenir l'équation générale de la surface sous forme finie. On considérera la génératrice comme déterminée par l'intersection d'un plan parallèle au plan directeur,

$$(10)\qquad Ax + By + Cz = \theta,$$

avec un plan mené par l'origine des coordonnées,

$$(11)\qquad z = \lambda x + \mu y,$$

les trois paramètres θ, λ, μ devant être liés par deux relations, telles que

$$(12)\qquad \lambda = \varpi(\theta), \quad \mu = \Pi(\theta).$$

L'élimination de θ, λ, μ entre ces quatre équations donne immé-

diatement l'équation de la surface

$$z = x\varpi(Ax + By + Cz) + y\Pi(Ax + By + Cz). \tag{13}$$

Pour éliminer les fonctions arbitraires, laissons, pour abréger, la lettre θ au lieu de $Ax + By + Cz$. On a

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = A + Cp, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = B + Cq,$$

$$p - \varpi(\theta) = [x\varpi'(\theta) + y\Pi'(\theta)]\frac{\partial\theta}{\partial x},$$

$$q - \Pi(\theta) = [x\varpi'(\theta) + y\Pi'(\theta)]\frac{\partial\theta}{\partial y},$$

d'où

$$\frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial x}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial y}} = \frac{A + Cp}{B + Cq} = \frac{p - \varpi(\theta)}{q - \Pi(\theta)} = \frac{A + C\varpi(\theta)}{B + C\Pi(\theta)}, \tag{14}$$

$$Bp - (B + Cq)\varpi(\theta) = Aq - (A + Cp)\Pi(\theta).$$

Différentiant de nouveau cette dernière équation par rapport à x et à y, on a

$$\begin{aligned}[B + C\Pi(\theta)]r - [A + C\varpi(\theta)]s \\ = [(B + Cq)\varpi'(\theta) - (A + Cp)\Pi'(\theta)]\frac{\partial\theta}{\partial x},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[B + C\Pi(\theta)]s - [A + C\varpi(\theta)]t \\ = [(B + Cq)\varpi'(\theta) - (A + Cp)\Pi'(\theta)]\frac{\partial\theta}{\partial y},\end{aligned}$$

d'où, d'après les égalités (14),

$$\begin{aligned}&\frac{[B + C\Pi(\theta)]r - [A + C\varpi(\theta)]s}{[B + C\Pi(\theta)]s - [A + C\varpi(\theta)]t} \\ &= \frac{\dfrac{\partial\theta}{\partial x}}{\dfrac{\partial\theta}{\partial y}} = \frac{A + Cp}{B + Cq} = \frac{(B + Cq)r - (A + Cp)s}{(B + Cq)s - (A + Cp)t}.\end{aligned}$$

En développant, on retrouve ainsi l'équation aux dérivées partielles (8).

1040. On peut obtenir directement l'équation (8) par des considérations géométriques, en exprimant :

1° Que si, par un point quelconque de la surface, on mène une génératrice et un plan tangent

$$(15)\qquad p(\xi - x) + q(\eta - y) = \zeta - z,$$

la génératrice sera l'intersection du plan tangent avec un plan mené par (x, y, z) parallèlement au plan directeur

$$(16)\qquad A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0,$$

de sorte que (15) et (16) sont les équations de la génératrice;

2° Que le point (x, y, z) de la surface étant un point quelconque de la génératrice considérée, celle-ci ne changera pas si l'on mène le plan tangent (15) par un point $(x + dx, y + dy, z + dz)$, situé sur cette même génératrice. Donc, si dx, dy, dz sont tels que les équations (15) et (16) soient vérifiées en posant

$$\xi = x + dx, \quad \eta = y + dy, \quad \zeta = z + dz,$$

c'est-à-dire si l'on a

$$(17)\qquad p\,dx + q\,dy = dz,$$

$$(18)\qquad A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0,$$

les équations (15) et (16) subsisteront pour les mêmes valeurs de ξ, η, ζ, lorsqu'on y changera x, y, z en $x + dx, y + dy, z + dz$, c'est-à-dire qu'elles subsisteront en même temps que leurs différentielles prises par rapport à x, y, z, p, q.

La différentielle de (15) devient, en vertu de (17),

$$(19)\qquad (\xi - x)\,dp + (\eta - y)\,dq = 0;$$

la différentielle de (16) est précisément l'équation (18). Or, on tire des équations (15) et (16)

$$(20)\qquad \frac{\xi - x}{B + Cq} = \frac{\eta - y}{-A - Cp} = \frac{\zeta - z}{Aq - Bp},$$

et, en vertu de ces proportions, l'équation (19) devient

$$(B + Cq)\,dp - (A + Cp)\,dq = 0.$$

En mettant cette dernière équation et l'équation (18) sous la

forme

$$[(B + Cq)r - (A + Cp)s]dx + [(B + Cq)s - (A + Cp)t]dy = 0,$$
$$(A + Cp)dx + (B + Cq)dy = 0,$$

et éliminant entre celles-ci le rapport $\frac{dy}{dx}$, on obtient l'équation (8).

1041. On peut encore trouver directement des équations aux dérivées partielles du premier ordre, contenant chacune une fonction arbitraire, et qui seront des intégrales premières par rapport à l'équation du second ordre (8).

En effet, si le plan (16), parallèle au plan directeur, reste le même, c'est-à-dire si le point de contact (x, y, z) se déplace de manière que la quantité $\theta = Ax + By + Cz$ reste constante, l'intersection du plan (16) avec le plan tangent (15), représentée par les équations (20), restera constante; au contraire, cette intersection variera avec θ. Donc les trois rapports

$$\frac{A + Cp}{Aq - Bp}, \quad \frac{B + Cq}{Aq - Bp}, \quad \frac{A + Cp}{B + Cq},$$

dont deux quelconques déterminent cette intersection, seront constants ou variables en même temps que θ, et, par suite, chacun de ces rapports est une fonction de θ. On a donc les trois équations

$$\frac{A + Cp}{Aq - Bp} = \varphi(Ax + By + Cz),$$
$$\frac{B + Cq}{Aq - Bp} = \chi(Ax + By + Cz),$$
$$\frac{A + Cp}{B + Cq} = \psi(Ax + By + Cz),$$

dont une quelconque est la conséquence des deux autres.

Chacune de ces équations, par l'élimination de la fonction arbitraire, reproduira l'équation (8). Si nous prenons, par exemple, la dernière,

$$A + Cp = (B + Cq)\psi(\theta),$$

on en tire, en différentiant,

$$C[r - s\psi(\theta)] = (B + Cq)\psi'(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x},$$

$$C[s - t\psi(\theta)] = (B + Cq)\psi'(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial y},$$

d'où, en éliminant $\psi'(\theta)$ par division, et remplaçant $\psi(\theta)$ par $\frac{A + Cp}{B + Cq}$, puis $\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}$ par leurs valeurs, il vient

$$\frac{(B + Cq)r - (A + Bp)s}{(B + Cq)s - (A + Bp)t} = \frac{A + Cp}{B + Cq},$$

c'est-à-dire l'équation (8).

1042. VI. *Surfaces réglées à droite directrice.* — Si l'on représente par

(1) $$x = Az + a, \quad y = Bz + b$$

les équations de la droite fixe sur laquelle doit constamment s'appuyer la génératrice, celle-ci sera l'intersection d'un plan quelconque passant par la droite (1) avec un plan perpendiculaire au plan des zx. On peut donc représenter cette génératrice par l'ensemble des deux équations

(2) $$\alpha(x - Az - a) = y - Bz - b, \quad z = \beta x + \gamma,$$

auxquelles il faut joindre deux équations de liaison entre les trois paramètres α, β, γ :

(3) $$\beta = \varphi(\alpha), \quad \gamma = \chi(\alpha).$$

En éliminant α, β, γ entre ces quatre équations, on trouve, pour l'équation de la surface,

(4) $$z = x\varphi\left(\frac{y - Bz - b}{x - Az - a}\right) + \chi\left(\frac{y - Bz - b}{x - Az - a}\right).$$

Éliminons maintenant les fonctions arbitraires φ et χ. Si on laisse, pour abréger, α au lieu de sa valeur, on a, en différentiant,

$$p - \varphi(\alpha) = [x\varphi'(\alpha) + \chi'(\alpha)]\frac{\partial\alpha}{\partial x}, \quad q = [x\varphi'(\alpha) + \chi'(\alpha)]\frac{\partial\alpha}{\partial y},$$

d'où l'on tire

(5) $$\frac{p-\varphi(\alpha)}{q}=\frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}}.$$

Or, en posant, pour abréger, $x-\mathrm{A}z-a=\mathrm{X}$, $y-\mathrm{B}z-b=\mathrm{Y}$, on a

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{-\mathrm{X}.\mathrm{B}p-\mathrm{Y}(1-\mathrm{A}p)}{\mathrm{X}^2},\quad \frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{\mathrm{X}(1-\mathrm{B}q)+\mathrm{Y}.\mathrm{A}q}{\mathrm{X}^2},$$

d'où, à cause de $\alpha=\dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}$,

$$\frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}}{\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}}=\frac{(\mathrm{A}\alpha-\mathrm{B})p-\alpha}{(\mathrm{A}\alpha-\mathrm{B})q+1}.$$

Mettant cette valeur dans l'équation (5), celle-ci devient

(6) $$p+[\alpha-(\mathrm{A}\alpha-\mathrm{B})\varphi(\alpha)]q-\varphi(\alpha)=0.$$

Différentiant maintenant cette équation par rapport à x et à y, on en tire par division, en mettant pour $\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}:\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}$ sa valeur,

$$\frac{[(\mathrm{A}\alpha-\mathrm{B})q+1]r-[(\mathrm{A}\alpha-\mathrm{B})p-\alpha]s}{[(\mathrm{A}\alpha-\mathrm{B})q+1]s-[(\mathrm{A}\alpha-\mathrm{B})p-\alpha]t}=\frac{(\mathrm{A}\alpha-\mathrm{B})p-\alpha}{(\mathrm{A}\alpha-\mathrm{B})q+1},$$

ou, en posant

$$\frac{(\mathrm{A}\alpha-\mathrm{B})p-\alpha}{(\mathrm{A}\alpha-\mathrm{B})q+1}=\frac{[\mathrm{A}(y-b)-\mathrm{B}(x-a)]p-(y-\mathrm{B}z-b)}{[\mathrm{A}(y-b)-\mathrm{B}(x-a)]q+x-\mathrm{A}z-a}=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}},$$

(7) $$\mathrm{Q}^2r-2\mathrm{PQ}s+\mathrm{P}^2t=0,$$

équation aux dérivées partielles de la famille de surfaces considérée.

Si l'on prend la directrice (1) pour axe des z, alors

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}=a=b=0,\quad \mathrm{P}=-y,\quad \mathrm{Q}=x,$$

et l'équation (7) devient

(8) $$x^2r+2xys+y^2t=0.$$

1043. On peut trouver directement l'équation (7) par des considérations géométriques. La génératrice est l'intersection du plan tangent

$$(9) \qquad \zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

avec un plan passant par le point (x, y, z) et par la droite (1), et ayant par conséquent pour équation

$$(10) \qquad \frac{\xi - A\zeta - a}{x - Az - a} = \frac{\eta - B\zeta - b}{y - Bz - b},$$

ou, en posant, pour abréger, $x - Az - a = X$, $y - Bz - b = Y$,

$$(11) \qquad \frac{\xi - x - A(\zeta - z)}{X} = \frac{\eta - y - B(\zeta - z)}{Y}.$$

Si l'on passe du point (x, y, z) à un point $(x + dx, y + dy, z + dz)$ situé sur la même génératrice, c'est-à-dire tel que l'on ait, en faisant $\xi = x + dx$, etc.,

$$(12) \qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

$$(13) \qquad \frac{dx - A\,dz}{X} = \frac{dy - B\,dz}{Y},$$

les équations (9) et (10), où l'on aura augmenté x de dx, y de dy, z de dz, donneront encore les mêmes valeurs pour ξ, η, ζ, les deux nouveaux plans se coupant suivant la même génératrice. Les équations (9) et (10) subsisteront donc en même temps que leurs différentielles par rapport à x, y, z. En différentiant l'équation (10) et ayant égard à cette équation elle-même, on retrouve l'équation (13). En différentiant l'équation (9) et ayant égard à (12), il vient

$$(14) \qquad (\xi - x)\,dp + (\eta - y)\,dq = 0.$$

Si l'on élimine $\zeta - z$ de (11), au moyen de l'équation (9), il vient

$$\frac{(1 - Ap)(\xi - x) - Aq(\eta - y)}{X} = \frac{-Bp(\xi - x) + (1 - Bq)(\eta - y)}{Y},$$

ou, en remplaçant $\xi - x$, $\eta - y$ par les quantités $-dq$, dp, qui

leur sont proportionnelles en vertu de (14), et adoptant les notations du numéro précédent,

$$-P\,dq = Q\,dp.$$

Éliminant de même dz de (13) au moyen de (12), on trouvera

$$-P\,dx = Q\,dy.$$

Développant les valeurs de dp, dq, et éliminant entre ces deux équations le rapport $\frac{dy}{dx}$, on retrouve l'équation (7).

1044. Enfin on peut obtenir des équations aux dérivées partielles du premier ordre, avec une fonction arbitraire, qui seront des intégrales premières de l'équation (7).

En effet, les équations de la génératrice (9) et (11) peuvent, en éliminant tour à tour $\zeta - z$ et $\eta - y$, se mettre sous la forme

$$\frac{\xi - x}{Q} = \frac{\eta - y}{-P} = \frac{\zeta - z}{pX + qY},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\zeta = \frac{pX + qY}{Q}\xi + z - \frac{pX + qY}{Q}x,$$

$$\eta = -\frac{P}{Q}\xi + y + \frac{P}{Q}x.$$

Si l'on coupe toujours la surface par le même plan $\alpha X - Y = 0$, c'est-à-dire si le rapport $\alpha = \frac{Y}{X}$ reste constant, la génératrice devra rester constante, et par suite aussi les coefficients qui la déterminent,

$$\frac{pX + qY}{Q}, \quad z - \frac{pX + qY}{Q}x,$$

$$-\frac{P}{Q}, \qquad y + \frac{P}{Q}x,$$

et cette génératrice et ces coefficients varieront seulement avec α.

Donc on devra avoir les quatre équations

$$\frac{pX+qY}{Q}=\varphi(\alpha),\quad z-\frac{pX+qY}{Q}x=\chi(\alpha),$$

$$-\frac{P}{Q}=\psi(\alpha),\qquad y+\frac{P}{Q}x=\omega(\alpha).$$

La première de ces équations peut s'écrire

$$\frac{p+q\alpha}{(A\alpha-B)q+1}=\varphi(\alpha),$$

et l'on voit que ce n'est autre chose que l'équation (6) du n° **1042**. La seconde est équivalente à celle que l'on obtiendrait en éliminant $\varphi(\alpha)$ entre les équations (4) et (6). Ensuite l'équation (5) peut s'écrire

$$\frac{p-\varphi(\alpha)}{q}=\frac{P}{Q},$$

ce qui donne, en remplaçant le premier membre par sa valeur tirée de (6),

$$-\frac{P}{Q}=\alpha-(A\alpha-B)\varphi(\alpha),$$

et cela montre que la troisième équation est une conséquence de la première. Enfin, à cause de $y=Y+Bz+b=\alpha X+Bz+b$, on a

$$\begin{aligned}y+\frac{P}{Q}x&=\alpha(x-Az-a)+Bz+b-[\alpha-(A\alpha-B)\varphi(\alpha)]x\\&=-(A\alpha-B)[z-x\varphi(\alpha)]-a\alpha+b\\&=-(A\alpha-B)\chi(\alpha)-a\alpha+b,\end{aligned}$$

ce qui fait voir que la quatrième équation est une conséquence de la deuxième.

Si l'on prend la directrice fixe pour axe des z, ces équations deviennent

$$px+qy=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\quad z-px-qy=\chi\left(\frac{y}{x}\right).$$

1043. Comme exemple d'une surface appartenant à cette famille, nous citerons le *biais passé*, engendré par une droite s'appuyant sur deux cercles verticaux, dont les diamètres sont deux droites

égales et parallèles situées dans le plan horizontal, et sur une droite perpendiculaire à ces deux diamètres et passant par le centre du parallélogramme dont ces diamètres sont les côtés opposés.

Si l'on choisit cette droite horizontale pour axe des z, les équations de la génératrice seront, en prenant l'axe des x équidistant des deux cercles,

$$y = \alpha x, \quad z = \beta x + \gamma, \tag{1}$$

et celles des deux cercles directeurs,

$$(x - a)^2 + y^2 = c^2, \quad z = -b, \tag{2}$$

$$(x + a)^2 + y^2 = c^2, \quad z = b. \tag{3}$$

Éliminant x, y, z entre les équations (1) et (2), puis entre les équations (1) et (3), on a les deux relations

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + \alpha^2)(b + \gamma)^2 + 2a\beta(b + \gamma) = (c^2 - a^2)\beta^2, \\ (1 + \alpha^2)(b - \gamma)^2 + 2a\beta(b - \gamma) = (c^2 - a^2)\beta^2, \end{array} \right. \tag{4}$$

d'où l'on tire, par soustraction,

$$[(1 + \alpha^2)b + a\beta]\gamma = 0. \tag{5}$$

Cette équation admet d'abord la solution $\gamma = 0$, qui donnerait $\beta = \frac{z}{x}$, et, par suite, l'une ou l'autre des équations (4) deviendrait

$$b^2(x^2 + y^2) + 2abxz - (c^2 - a^2)z^2 = 0,$$

équation d'un cône ayant pour sommet le centre du parallélogramme et pour sections circulaires les deux cercles donnés. Mais ce cône ne satisferait pas à la condition qu'exige la construction d'une voûte s'appuyant sur les deux demi-cercles supérieurs. Prenant donc l'autre solution de l'équation (5),

$$\beta = -\frac{b}{a}(1 + \alpha^2),$$

on tire de l'équation obtenue par l'addition des équations (4),

$$(1 + \alpha^2)(b^2 + \gamma^2) + 2ab\beta = (c^2 - a^2)\beta^2,$$

la valeur

$$\gamma^2 = \frac{b^2}{a^2}[c^2 + (c^2 - a^2)\alpha^2].$$

Substituant dans la seconde équation (1) les valeurs de β, γ et celle de $\alpha = \frac{y}{x}$, on a, pour l'équation de la surface cherchée,

$$\left(\frac{a}{b}xz + x^2 + y^2\right)^2 = c^2x^2 + (c^2 - a^2)y^2.$$

1046. VII. *Surfaces développables.* — On appelle *surface développable* une surface engendrée par le mouvement d'une droite dont deux positions consécutives se coupent (ou, plus exactement, ont une distance infiniment petite d'ordre supérieur au second [630]). Le lieu des intersections successives de cette génératrice est une courbe à laquelle toutes les positions de la génératrice sont tangentes, et que l'on nomme l'*arête de rebroussement* de la surface.

Soient

$$(1) \qquad \alpha = \varphi(\gamma), \quad \beta = \chi(\gamma)$$

les équations de cette courbe. Celles de la génératrice seront

$$(2) \qquad x - \alpha = \varphi'(\gamma)(z - \gamma), \quad y - \beta = \chi'(\gamma)(z - \gamma).$$

Différentiant ces deux équations par rapport à x, puis par rapport à y, il vient, eu égard à ce que $\frac{d\alpha}{d\gamma} = \varphi'(\gamma)$, $\frac{d\beta}{d\gamma} = \chi'(\gamma)$,

$$(3) \quad \begin{cases} 1 - p\varphi'(\gamma) = \varphi''(\gamma)(z-\gamma)\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}, & -q\varphi'(\gamma) = \varphi''(\gamma)(z-\gamma)\dfrac{\partial\gamma}{\partial y}, \\ -p\chi'(\gamma) = \chi''(\gamma)(z-\gamma)\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}, & 1 - q\chi'(\gamma) = \chi''(\gamma)(z-\gamma)\dfrac{\partial\gamma}{\partial y}. \end{cases}$$

On tire de là, par division,

$$\frac{1 - p\varphi'(\gamma)}{-p\chi'(\gamma)} = \frac{\varphi''(\gamma)}{\chi''(\gamma)} = \frac{-q\varphi'(\gamma)}{1 - q\chi'(\gamma)}.$$

L'élimination de γ entre ces deux équations conduit à une relation entre p et q, de la forme

$$(4) \qquad q = \varpi(p),$$

ϖ étant une fonction dépendante des fonctions arbitraires φ et χ.

En différentiant cette équation (4) par rapport à x et à y, et

éliminant $\varpi'(p)$, on a, pour l'équation générale aux dérivées partielles du second ordre, des surfaces développables

$$(5) \qquad rt - s^2 = 0.$$

1047. Autrement, on peut obtenir directement l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (4). En effet, deux génératrices consécutives sont dans un même plan, tangent à la surface le long d'une de ces génératrices. Si donc le point (x, y, z) se déplace le long d'une génératrice, les coefficients de l'équation du plan tangent

$$\zeta = p\xi + q\eta + z - px - qy,$$

savoir

$$p, \quad q, \quad z - px - qy,$$

resteront tous les trois constants. Remarquons d'ailleurs que, si dp et dq sont nuls, $d(z - px - qy)$ est aussi nul, et par suite la constance des deux premiers coefficients entraîne celle du troisième. De plus, si q variait, par exemple, sans que p variât, la trace du plan tangent sur le plan des zx se déplacerait parallèlement à elle-même, et par suite, le plan tangent se mouvant parallèlement à une droite fixe, la surface serait un cylindre [1025]. En excluant ce cas, on voit que p et, par suite, $z - px - qy$ doivent varier avec q. Donc deux quelconques de ces quantités sont fonctions de la troisième, ce qui donne d'abord l'équation (4), puis les deux équations équivalentes

$$z - px - qy = \psi(p), \quad z - px - qy = \omega(q).$$

1048. On peut trouver aussi de la même manière l'équation du second ordre (5). Si p et q sont constants ensemble pour la valeur de $\frac{dy}{dx}$ qui répond à la génératrice, cette valeur devra donner à la fois

$$dp = 0, \quad dq = 0,$$

c'est-à-dire

$$r + s\frac{dy}{dx} = 0, \quad s + t\frac{dy}{dx} = 0,$$

d'où l'on tire l'équation (5).

1049. VIII. *Surfaces réglées.* — Les équations de la génératrice d'une surface réglée quelconque sont de la forme

$$(1) \qquad x = \alpha z + \beta, \quad y = \gamma z + \delta,$$

les quatre paramètres α, β, γ, δ étant liés entre eux par trois relations arbitraires, telles que

$$(2) \qquad \beta = \varphi(\alpha), \quad \gamma = \chi(\alpha), \quad \delta = \psi(\alpha).$$

Pour éliminer ces fonctions arbitraires, différentions les équations (1) par rapport à x et à y, en faisant, pour abréger, $\frac{d\beta}{d\alpha} = \beta'$, etc. Nous aurons ainsi

$$1 - p\alpha = (z + \beta')\frac{\partial\alpha}{\partial x}, \qquad -p\gamma = (\gamma' z + \delta')\frac{\partial\alpha}{\partial x},$$

$$-q\alpha = (z + \beta')\frac{\partial\alpha}{\partial y}, \qquad 1 - q\gamma = (\gamma' z + \delta')\frac{\partial\alpha}{\partial y},$$

d'où

$$\frac{\frac{\partial\alpha}{\partial x}}{\frac{\partial\alpha}{\partial y}} = \frac{1 - p\alpha}{-q\alpha} = \frac{-p\gamma}{1 - q\gamma} = -\frac{\gamma}{\alpha},$$

et par suite

$$(3) \qquad p\alpha + q\gamma = 1.$$

Différentiant maintenant cette dernière équation, on a

$$r\alpha + s\gamma + (p + q\gamma')\frac{\partial\alpha}{\partial x} = 0,$$

$$s\alpha + t\gamma + (p + q\gamma')\frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0,$$

d'où, en divisant, et remplaçant le rapport $\frac{\partial\alpha}{\partial x} : \frac{\partial\alpha}{\partial y}$ par sa valeur $-\frac{\gamma}{\alpha}$,

$$\frac{r\alpha + s\gamma}{s\alpha + t\gamma} = -\frac{\gamma}{\alpha},$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad r\alpha^2 + 2s\alpha\gamma + t\gamma^2 = 0.$$

Différentiant enfin une troisième fois, et désignant, avec Monge,

par u, w, w, v les quatre dérivées partielles du troisième ordre

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3},$$

on trouvera de la même manière l'équation

(5) $$u\alpha^3 + 3w\alpha^2\gamma + 3w\alpha\gamma^2 + v\gamma^3 = 0.$$

Éliminant entre les équations (4) et (5) le rapport $\frac{\gamma}{\alpha}$, on a, pour l'équation générale aux dérivées partielles des surfaces réglées,

$$\begin{vmatrix} r & 2s & t & 0 & 0 \\ 0 & r & 2s & t & 0 \\ 0 & 0 & r & 2s & t \\ u & 3w & 3w & v & 0 \\ 0 & u & 3w & 3w & v \end{vmatrix} = 0.$$

§ III.

DES SURFACES ENVELOPPES. — FORMATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE NON LINÉAIRES.

1050. L'enveloppe d'une surface

(1) $$F(x, y, z, \alpha) = 0,$$

dont l'équation renferme un paramètre arbitraire α, s'obtient [1008] en éliminant α entre l'équation (1) et sa dérivée par rapport à α

(2) $$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0.$$

L'ensemble des équations (1) et (2) représente la courbe d'intersection de deux enveloppées consécutives; cette courbe, qui peut être considérée comme la génératrice de l'enveloppe, porte le nom de *caractéristique* de l'enveloppe.

Le lieu des intersections successives de la caractéristique, que l'on obtient en joignant aux équations (1) et (2) la dérivée seconde

(3) $$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} = 0,$$

se nomme l'*arête de rebroussement* de l'enveloppe.

1051. Considérons maintenant une équation à deux paramètres arbitraires

$$(4) \qquad F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0.$$

Si, entre cette équation et ses deux dérivées partielles par rapport à x et à y,

$$(5) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0,$$

on élimine les paramètres α et β, on obtiendra une équation aux dérivées partielles du premier ordre, non linéaire en général,

$$(6) \qquad f(x, y, z, p, q) = 0,$$

qui représentera une propriété commune à toutes les surfaces de la double série représentée par l'équation (4).

Par exemple, si l'on donne l'équation générale des sphères de rayon donné R, ayant leur centre dans le plan des xy,

$$(7) \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = R^2,$$

on a, en différentiant par rapport à x et à y,

$$x - \alpha + pz = 0, \quad y - \beta + qz = 0,$$

d'où, en éliminant α et β,

$$(8) \qquad (p^2 + q^2 + 1)z^2 = R^2,$$

équation aux dérivées partielles qui exprime que, dans toutes les sphères (7), la longueur de la normale, comprise entre le point de la surface et le plan des xy, est constamment égale à R.

1052. Parmi toutes les surfaces qui satisfont à l'équation (4) et par suite aussi à l'équation (6), on peut choisir celles dans lesquelles α et β sont liés par une relation arbitraire

$$(9) \qquad \beta = \varphi(\alpha).$$

Ces surfaces, dont l'équation générale devient

$$(10) \qquad F[x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)] = 0,$$

ne contiennent plus qu'un seul paramètre arbitraire α, et auront une

enveloppe, que l'on obtiendra [1050] en éliminant α entre l'équation (10) et sa dérivée par rapport à α,

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \varphi'(\alpha) = 0. \tag{11}$$

D'après l'équation (11), α devient une fonction des coordonnées, que l'on devra substituer à la constante dans l'équation (10). Or, si l'on différentie l'équation (4) ou (10) par rapport à x et à y, en y considérant α et par suite aussi β comme des variables déterminées par les équations (11) et (9), les termes en $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ et $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$ provenant de la variation de α disparaîtront en vertu de l'équation (11), de sorte que les équations dérivées

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0 \tag{12}$$

prendront la même forme que si α et β étaient des constantes, comme au n° 1051. Donc l'élimination de α et de β entre les trois équations $F = 0$ et (12) conduira à la même équation (6) que si α et β étaient des paramètres constants.

Donc l'équation aux dérivées partielles (6) convient à l'enveloppe de la catégorie de surfaces déterminée par l'équation (4), dans laquelle on assujettit α et β à une relation arbitraire (9). Donc l'équation (6) admet pour intégrale non-seulement l'équation (4), renfermant deux constantes arbitraires, mais encore l'équation résultant de l'élimination de α entre les équations (10) et (11), équation qui dépend de la détermination de la fonction arbitraire φ.

1053. On voit que, lorsque l'on connaît l'intégrale (4), avec deux constantes arbitraires, que l'on nomme l'*intégrale complète* de l'équation (6), il est aisé d'obtenir l'intégrale représentée par l'ensemble des équations (10) et (11), et que l'on appelle l'*intégrale générale,* renfermant une fonction arbitraire qui peut amener une infinité de constantes arbitraires. Il suffit pour cela de considérer l'une des arbitraires β comme une fonction de l'autre α, et d'éliminer α entre l'équation (4) ou (10) et sa dérivée (11) par rapport à α.

L'ensemble des équations (10) et (11) représente la caractéristique de l'enveloppe déterminée par l'intégrale générale.

Si, au lieu de l'intégrale complète, on connaissait l'intégrale générale, on pourrait en déduire, réciproquement, l'intégrale complète, et cela sous une infinité de formes différentes. Il suffirait, pour cela, de particulariser d'une manière quelconque la fonction arbitraire $\varphi(\alpha)$, de façon qu'elle renfermât deux constantes arbitraires, et d'éliminer ensuite α entre les équations (10) et (11) ainsi obtenues.

1054. Par exemple, si dans l'équation (7) on pose $\beta = \varphi(\alpha)$, l'enveloppe de la sphère mobile dont le centre décrit la courbe $\beta = \varphi(\alpha)$ sera représentée par l'ensemble des équations

$$(13)\quad \begin{cases} (x-\alpha)^2 + [y - \varphi(\alpha)]^2 + z^2 = R^2, \\ x - \alpha + [y - \varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha) = 0, \end{cases}$$

d'où l'on éliminerait α. Cette enveloppe porte le nom de *surface-canal*. Elle jouit, aussi bien que les sphères enveloppées, de la propriété, exprimée par l'équation aux dérivées partielles (8), que la longueur de la normale est constamment égale à R.

De l'intégrale générale (13) on tire la solution complète (7) en prenant $\varphi(\alpha) = \beta$ et α pour constantes. On en trouvera une autre en posant $\varphi(\alpha) = a\alpha + b$, a et b étant des constantes, et éliminant α entre les équations

$$(x-\alpha)^2 + (y - a\alpha - b)^2 + z^2 = R^2,$$
$$x - \alpha + (y - a\alpha - b)\,a = 0,$$

ce qui donne l'équation d'un cylindre

$$(13)'\quad \frac{(y - ax - b)^2}{1 + a^2} + z^2 = R^2,$$

qui a également pour enveloppe une surface-canal, et dont l'équation conduit encore, par l'élimination des constantes a et b, à la même équation aux dérivées partielles (8).

1055. L'équation aux dérivées partielles (6) est encore vérifiée par l'équation que l'on obtient en éliminant les deux constantes α et β entre l'équation (4) et ses dérivées partielles par rapport à ces deux constantes

$$(14)\quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0,$$

qui entraînent l'équation (11). La relation ainsi trouvée ne contient plus ni constante ni fonction arbitraire. Elle représente une surface tangente à la fois à toutes les surfaces représentées tant par l'intégrale complète que par l'intégrale générale. On l'appelle la *solution singulière* de l'équation (6).

Ainsi, si l'on élimine α et β entre l'équation (7) et ses deux dérivées partielles par rapport à α et à β

$$x - \alpha = 0, \quad y - \beta = 0,$$

on a l'équation

$$z^2 = R^2,$$

qui représente deux plans tangents à la fois à toutes les sphères (7), à toutes les surfaces-canaux (13), à tous les cylindres (13)', et qui est la solution singulière de l'équation (8).

1056. Ainsi l'équation aux dérivées partielles du premier ordre non linéaire (6) est susceptible de trois sortes de solutions; elle admet :

1° Une solution renfermant deux constantes arbitraires et correspondant aux enveloppées individuelles. C'est l'*intégrale complète.*

2° Une solution dépendant d'une fonction arbitraire, solution qui se déduit de l'intégrale complète, en établissant entre les deux constantes arbitraires de celle-ci une relation arbitraire, et éliminant ces constantes entre cette relation arbitraire, l'équation proposée et la dérivée de cette dernière prise par rapport à l'une des constantes, dont l'autre est une fonction. C'est l'*intégrale générale,* représentant, pour chaque détermination de la relation arbitraire, l'enveloppe de la série de surfaces correspondante, représentée par l'intégrale complète.

3° Une solution ne renfermant plus ni constante ni fonction arbitraire, et représentant une surface tangente à toutes les enveloppées données par l'intégrale complète et à toutes les enveloppes données par l'intégrale générale. C'est la *solution singulière,* qui se tire de l'intégrale complète en éliminant les deux constantes entre cette intégrale et ses deux dérivées partielles prises par rapport à ces constantes.

1057. Prenons encore comme exemple l'enveloppe des posi-

tions d'un plan

$$(15) \qquad z = \alpha + \beta x + \gamma y.$$

Les trois paramètres α, β, γ doivent être liés par deux relations

$$(16) \qquad \beta = \varphi(\alpha), \quad \gamma = \chi(\alpha).$$

En différentiant l'équation (15) par rapport à α, et ayant égard aux équations (16), il vient

$$(17) \qquad 0 = 1 + x\varphi'(\alpha) + y\chi'(\alpha).$$

Si l'on élimine α, β, γ entre les équations (15), (16), (17), on aura l'équation de l'enveloppe, qui est une surface développable. L'ensemble des équations (15), (16) et (17) représente la caractéristique, qui est une droite, et l'élimination de α entre ces mêmes équations et l'équation

$$0 = x\varphi''(\alpha) + y\chi''(\alpha)$$

donnera l'équation de l'arête de rebroussement.

Si l'on suppose que la fonction $\chi(\alpha)$ dépende de la fonction $\varphi(\alpha)$ suivant une loi *donnée*, exprimée par la relation

$$\chi(\alpha) = f[\varphi(\alpha)], \quad \text{ou} \quad \gamma = f(\beta),$$

l'équation de l'enveloppée

$$(18) \qquad z = \alpha + \beta x + f(\beta) y$$

contiendra deux constantes arbitraires α, β; celle de l'enveloppe dépendra d'une fonction arbitraire $\beta = \varphi(\alpha)$.

En considérant α et β comme des constantes, les deux dérivées partielles de l'équation (18) sont

$$p = \beta, \quad q = f(\beta),$$

d'où l'on tire, par l'élimination de β,

$$(19) \qquad q = f(p),$$

équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait le plan mobile.

Si l'on considère l'enveloppe, pour laquelle α est variable et β

fonction de α, alors on a les équations

$$p=\beta \quad +\left[1+x\frac{d\beta}{d\alpha}+yf'(\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\frac{\partial\alpha}{\partial x},$$
$$q=f(\beta)+\left[1+x\frac{d\beta}{d\alpha}+yf'(\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\frac{\partial\alpha}{\partial y},$$

qui se réduisent à $p=\beta$, $q=f(\beta)$ en vertu de l'équation (17), et d'où l'on tire encore l'équation (19).

Enfin, si l'on voulait avoir la solution singulière, il faudrait déterminer α et β par les équations (14), qui deviennent ici

$$0=1, \quad 0=x+yf'(\beta),$$

et dont la première est impossible. On voit donc qu'il n'y a pas, dans le cas actuel, d'enveloppe générale correspondant à une solution singulière.

1058. Plus généralement, supposons que l'on donne une équation, entre la fonction z, les n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et n paramètres arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,

$$(20) \qquad F(z, x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)=0.$$

Entre cette équation et ses n dérivées partielles

$$(21) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial z}p_1=0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n}+\frac{\partial F}{\partial z}p_n=0,$$

$p_1, \ldots, p_n$ désignant les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$, éliminons les n paramètres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$; on obtiendra une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(22) \qquad f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)=0,$$

dont l'équation (20) sera l'*intégrale complète*.

Au lieu de considérer maintenant $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ comme des constantes, considérons-les comme des variables liées entre elles par $n-1$ relations arbitraires, que l'on pourra mettre sous la forme

$$(23) \qquad \alpha_1=\varphi_1(\alpha_n), \quad \ldots, \quad \alpha_{n-1}=\varphi_{n-1}(\alpha_n).$$

Alors, quand on différentiera l'équation (20) par rapport à x_i, la variabilité de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ introduira dans l'équation dérivée le terme

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_n} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \alpha_{n-1}}\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \alpha_n} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right)\frac{\partial \alpha_n}{\partial x_i}.$$

Si l'on égale à zéro le multiplicateur commun des dérivées $\frac{\partial \alpha_n}{\partial x_1}, \ldots,$ $\frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n}$ dans toutes les équations dérivées, celles-ci se réduiront aux équations (21), comme si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ étaient des constantes, et l'élimination de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ entre les équations (20) et (21) conduira encore à la même équation aux dérivées partielles (22). Donc on aura encore une solution de l'équation aux dérivées partielles (22) en éliminant $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ entre les équations

$$(24)\qquad F = 0, \quad \alpha_1 = \varphi_1(\alpha_n), \quad \ldots, \quad \alpha_{n-1} = \varphi_{n-1}(\alpha_n), \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right) = 0,$$

$\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right)$ désignant, pour abréger, la dérivée de F prise par rapport à α_n, en y faisant varier les quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ qui dépendent de α_n. On a ainsi une *intégrale générale* de l'équation (22), renfermant $n-1$ fonctions arbitraires.

Si, au lieu de $n-1$ relations arbitraires entre $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, on n'en établit que $n-2$, celles-ci pourront se mettre sous la forme

$$\alpha_1 = \varphi_1(\alpha_{n-1}, \alpha_n), \quad \ldots, \quad \alpha_{n-2} = \varphi_{n-2}(\alpha_{n-1}, \alpha_n).$$

Alors la variabilité de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ajoute à l'équation dérivée par rapport à x_i les deux termes

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_{n-1}} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \alpha_{n-2}}\frac{\partial \alpha_{n-2}}{\partial \alpha_{n-1}} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_{n-1}}\right)\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_i}$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_n} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \alpha_{n-2}}\frac{\partial \alpha_{n-2}}{\partial \alpha_n} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right)\frac{\partial \alpha_n}{\partial x_i}.$$

En égalant à zéro les deux parenthèses, toutes les équations dérivées se réduiront aux équations (21) et conduiront encore à la même équation (22). Donc l'équation (22) est susceptible d'une seconde intégrale générale, contenant $n-2$ fonctions arbitraires,

et représentée par l'ensemble des équations

$$(25)\quad \begin{cases} F = 0, \quad \alpha_1 = \varphi_1(\alpha_{n-1}, \alpha_n), \quad \ldots, \quad \alpha_{n-2} = \varphi_{n-2}(\alpha_{n-1}, \alpha_n), \\ \left(\dfrac{\partial F}{\partial \alpha_{n-1}}\right) = 0, \quad \left(\dfrac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right) = 0. \end{cases}$$

En continuant ainsi, on verra que l'équation (22) admet des intégrales générales renfermant $n-3$, $n-4$, ..., 2, 1 fonctions arbitraires. Ainsi on aura une solution avec $n-k$ fonctions arbitraires, en éliminant $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ entre les équations

$$\alpha_1 = \varphi_1(\alpha_{n-k+1}, \ldots, \alpha_n), \quad \ldots, \quad \alpha_{n-k} = \varphi_{n-k}(\alpha_{n-k+1}, \ldots, \alpha_n),$$
$$F = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_{n-k+1}}\right) = 0, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right) = 0.$$

On aura une intégrale générale avec une fonction arbitraire en éliminant $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ entre les équations

$$(26)\quad F = 0, \quad \alpha_1 = \varphi_1(\alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_2}\right) = 0, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right) = 0.$$

Enfin, on aura une solution *singulière* de l'équation (22), ne renfermant ni constantes ni fonctions arbitraires, en éliminant $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ entre l'équation $F = 0$ et ses dérivées par rapport aux n paramètres,

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha_n} = 0.$$

On voit que toutes ces solutions diverses se déduisent de la seule intégrale complète (20) au moyen de différentiations et d'éliminations, de sorte que la connaissance d'une intégrale complète suffit pour obtenir toutes les solutions dont une équation aux dérivées partielles du premier ordre (22) est susceptible.

§ IV.

DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES EN GÉNÉRAL, DANS LE CAS DE DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES.

1059. Soit donnée *a priori* une équation aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes, et supposons-la

résolue par rapport à l'une des dérivées partielles $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, par exemple par rapport à q, de sorte qu'on ait

$$(1) \qquad q = f(x, y, z, p),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(2) \qquad d_y z = f(x, y, z, p)\, dy.$$

Pour $y = y_0$, traçons à volonté, dans le plan représenté par cette équation, une courbe arbitraire

$$(3) \qquad z = \varphi(x),$$

d'où l'on tire, pour la valeur de p correspondante,

$$(4) \qquad p = \varphi'(x).$$

En mettant pour z et pour p ces valeurs initiales dans l'équation (2), on aura, pour chaque point de la courbe (3), une valeur de l'accroissement $d_y z$ correspondant à l'accroissement dy de y. Au moyen de cette expression, on pourra construire, dans le plan $y = y_0 + dy$, une nouvelle courbe donnée par l'équation

$$z = \varphi(x) + d_y z = \varphi_1(x).$$

En répétant sur cette nouvelle courbe la construction que nous avons faite sur la première, on obtiendra de même une troisième courbe dans le plan $y = y_0 + 2dy$, et ainsi de suite indéfiniment. L'ensemble de toutes ces courbes successives aura pour limite une surface dont l'ordonnée sera une fonction de x et de y, satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles proposée et dépendant d'une fonction arbitraire, de telle sorte qu'on pourra faire passer cette surface par une courbe donnée arbitrairement dans un plan parallèle à celui des zx.

Remarquons que, si l'on considère le plan des zx comme plan horizontal, la construction précédente revient à la détermination successive des lignes de niveau de la surface au moyen de l'une d'entre elles, donnée arbitrairement.

1060. Si l'on donnait une courbe de niveau parallèle au plan des xy, considéré comme horizontal, on ramènerait ce cas au pré-

cédent en changeant de variables indépendantes, par exemple en considérant y comme fonction de x et de z. Si l'on différentie sous ce point de vue l'équation

$$z = f(x, y),$$

on aura

$$0 = f'(x) + f'(y)\frac{\partial y}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x}, \quad 1 = f'(y)\frac{\partial y}{\partial z} = q\frac{\partial y}{\partial z},$$

d'où l'on tire

$$q = \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial z}}, \quad p = -\frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial z}},$$

et l'équation proposée

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

devient

$$F\left(x, y, z, -\frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial z}}, \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial z}}\right) = 0.$$

On rentre alors dans le cas du numéro précédent.

On peut aussi faire la construction sans changement de variable dépendante. Soit donnée arbitrairement une ligne de niveau ayant pour équations

$$(2) \qquad z = z_0, \quad y = \chi(x).$$

Lorsque x et y varieront de manière à satisfaire à l'équation $y = \chi(x)$, z ne devra pas changer de valeur; donc l'expression $dz = p\,dx + q\,dy$ devra s'annuler pour $dy = \chi'(x)\,dx$, ce qui donne la condition

$$(3) \qquad p + q\chi'(x) = 0,$$

laquelle, jointe à l'équation donnée (1), déterminera les valeurs de p et de q tout le long de la ligne de niveau.

Pour construire la ligne de niveau infiniment voisine, imaginons qu'en chaque point de la première on mène une normale infiniment

petite, pour laquelle on aura

$$dy = -\frac{dx}{\chi'(x)}.$$

Si l'on désigne par γ l'angle de la normale à la surface avec l'axe des z, ou l'angle du plan tangent avec le plan des xy, la longueur $d\mathrm{N}$ de la portion de normale et l'accroissement dz formeront les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'angle opposé à dz sera γ.

On aura donc

$$d\mathrm{N} = \cot\gamma\, dz = \frac{dz}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

En donnant à dz une valeur constante infiniment petite, on construira les extrémités des $d\mathrm{N}$ pour tous les points de la courbe (2), ce qui donnera la projection de la seconde courbe de niveau sur la première et, partant, la position de cette seconde ligne de niveau dans l'espace. Et ainsi de suite.

1061. On peut encore, au moyen de l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad q = f(x, y, z, p),$$

obtenir le développement en série de la fonction z suivant les puissances de l'accroissement de l'une des variables, de y par exemple.

Soit donnée, en effet, pour $y = y_0$, la valeur arbitraire $z_0 = \varphi(x)$ de z. On en tire

$$p_0 = \varphi'(x),$$

et par suite

$$q_0 = \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{y=y_0} = f(x, y_0, z_0, p_0).$$

Or l'équation (1) peut, par des différentiations et des éliminations successives, faire connaître toutes les dérivées de z prises par rapport aux deux variables x, y, ou par rapport à y seulement, au moyen des dérivées de z prises par rapport à x seulement. On a, en effet,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial y} + q\,\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + f(x, y, z, p)\,\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\,\frac{\partial q}{\partial x},$$

ce qui donne $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ en fonction de $x, y, z, p, \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. On continuera de la même manière, en remarquant que

$$\frac{\partial \frac{\partial^n z}{\partial x^n}}{\partial y} = \frac{\partial^n \frac{\partial z}{\partial y}}{\partial x^n} = \frac{\partial^n f(x, y, z, p)}{\partial x^n}.$$

D'après cela, si l'on connaît z et par suite p pour $y = y_0$, on en conclura les valeurs pour $y = y_0$ de toutes les quantités

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}, \quad \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}, \quad \cdots.$$

On connaîtra donc tous les termes du développement

$$z = z_0 + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_0 (y - y_0) + \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]_0 \frac{(y - y_0)^2}{1.2} + \cdots.$$

Si les valeurs des variables sont telles que la série soit convergente, on aura donc une intégrale générale de l'équation (1), renfermant une fonction arbitraire.

1062. *Exemple.* — Soit l'équation $q = ap$ ou

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x},$$

et supposons que, pour $y = y_0 = 0$, on donne la valeur de $z_0 = \varphi(x)$. L'équation proposée fera connaître successivement

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = a \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial y}}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = a^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \, \partial y} = a^2 \frac{\partial^2 \frac{\partial z}{\partial y}}{\partial x^2} = a^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3},$$

et ainsi de suite, d'où

$$\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_0 = a \varphi'(x), \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]_0 = a^2 \varphi''(x), \quad \cdots.$$

On a donc, pour le développement de z,

$$\begin{aligned} z &= \varphi(x) + a\,\varphi'(x)\frac{y}{1} + a^2\varphi''(x)\frac{y^2}{1.2} + \ldots \\ &= \varphi(x) + ay\frac{\varphi'(x)}{1} + a^2y^2\frac{\varphi''(x)}{1.2} + \ldots \\ &= \varphi(x+ay). \end{aligned}$$

On a par conséquent, pour l'intégrale générale sous forme finie de l'équation proposée,

$$z = \varphi(x+ay),$$

φ désignant une fonction arbitraire.

Remarque. — Les méthodes exposées dans les numéros précédents ne fournissent pas la solution singulière de l'équation aux dérivées partielles, parce que l'on ne construit qu'une valeur unique de q et que l'on ne peut, par suite, considérer le cas où deux valeurs de q deviennent égales, ce qui a lieu en chaque point de l'enveloppe.

1063. Considérons maintenant une équation aux dérivées partielles, dans laquelle nous supposerons, pour plus de simplicité, que la dérivée la plus élevée par rapport à y ne soit affectée d'aucune différentiation par rapport à x, de sorte que l'équation soit de la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = f\left\{\begin{matrix} x, & y, & & \\ z, & \dfrac{\partial z}{\partial y}, & \ldots, & \dfrac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^m z}{\partial x^m}, & \dfrac{\partial^{m+1} z}{\partial x^m\,\partial y}, & \ldots, & \dfrac{\partial^{m+n-1} z}{\partial x^m\,\partial y^{n-1}} \end{matrix}\right\}.$$

Si l'on différentie cette équation par rapport à y, on introduira dans le second membre les quantités

$$\frac{\partial^n z}{\partial y^n}, \quad \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x\,\partial y^n}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m\,\partial y^n},$$

que l'on remplacera par le second membre de l'équation (1) et par les dérivées partielles de ce second membre, prises une ou plusieurs fois relativement à x, de sorte que, dans la valeur de

$\frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^{n+1}}$, il n'entrera que des quantités différentiées $n-1$ fois au plus par rapport à y.

En différentiant de nouveau par rapport à y, on introduira encore des quantités différentiées n fois par rapport à y, et on les éliminera comme tout à l'heure, en les remplaçant par des quantités différentiées $n-1$ fois au plus relativement à y et un certain nombre de fois par rapport à x.

De cette manière, on pourra exprimer, à l'aide de l'équation (1), $\frac{\partial^n z}{\partial y^n}$ et toutes les dérivées des ordres supérieurs prises relativement à y seulement, au moyen de x, de y, des quantités

$$(2) \qquad z, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}}$$

et des dérivées de ces quantités prises par rapport à x.

Supposons maintenant que, pour $y = y_0$, on donne les valeurs des quantités (2) en fonctions arbitraires de x :

$$(3) \qquad \varphi(x), \quad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1}(x).$$

Alors, d'après ce qu'on vient de voir, on connaîtra les valeurs, pour $y = y_0$, de toutes les quantités

$$\frac{\partial^n z}{\partial y^n}, \quad \frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^{n+1}}, \quad \frac{\partial^{n+2} z}{\partial y^{n+2}}, \quad \ldots,$$

exprimées au moyen de x, des quantités (3) et de leurs dérivées par rapport à x. On connaîtra donc les coefficients du développement de z suivant les puissances de $y - y_0$:

$$z = z_0 + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_0 \frac{y - y_0}{1} + \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]_0 \frac{(y - y_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

z_0, $\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_0$, $\cdots$ étant les valeurs de z, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\cdots$ pour $y = y_0$; et la valeur de z ainsi obtenue dépendra des n fonctions arbitraires (3), qui expriment les valeurs, pour $y = y_0$, de z et de ses $n-1$ premières dérivées par rapport à y, tout le reste étant complétement déterminé au moyen de l'équation aux dérivées partielles donnée.

1064. *Exemple.* — Considérons l'*équation des cordes vibrantes*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

En posant, pour abréger, $\frac{\partial z}{\partial y} = z_{,}$, on tire de cette équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = a^2 \frac{\partial^2 z_{,}}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = a^4 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}, \quad \frac{\partial^5 z}{\partial y^5} = a^4 \frac{\partial^4 z_{,}}{\partial x^4},$$
$$\dots\dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots\dots$$

Si l'on suppose données, pour $y = 0$, les valeurs $z = z_0$, $z_{,} = z_{,0}$ en fonction de x, il viendra

$$z = z_0 + \frac{y}{1} z_{,0} + \frac{a^2 y^2}{1.2} \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{a^3 y^3}{1.2.3} \frac{\partial^2 z_{,0}}{\partial x^2} + \dots.$$

Posons maintenant

$$z_0 = \varphi(x) + \chi(x), \quad z_{,0} = a\varphi'(x) - a\chi'(x),$$

d'où

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} z_0 + \frac{1}{2a} \int z_{,0}\, dx, \quad \chi(x) = \frac{1}{2} z_0 - \frac{1}{2a} \int z_{,0}\, dx.$$

Il viendra

$$z = \varphi(x) + \frac{ay}{1} \varphi'(x) + \frac{a^2 y^2}{1.2} \varphi''(x) + \frac{a^3 y^3}{1.2.3} \varphi'''(x) + \dots$$
$$+ \chi(x) - \frac{ay}{1} \chi'(x) + \frac{a^2 y^2}{1.2} \chi''(x) - \frac{a^3 y^3}{1.2.3} \chi'''(x) + \dots,$$

c'est-à-dire

$$z = \varphi(x + ay) + \chi(x - ay),$$

ce qui est l'intégrale générale de l'équation proposée.

1065. Nous allons indiquer comment cette équation a été intégrée pour la première fois par d'Alembert. Elle peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \frac{\partial z}{\partial y}}{\partial y} = \frac{\partial . a^2 \frac{\partial z}{\partial x}}{\partial x},$$

et, sous cette forme, elle exprime que l'expression

$$\frac{\partial z}{\partial y}dx + a^2\frac{\partial z}{\partial x}dy$$

est la différentielle exacte d'une fonction u de x et de y, de sorte qu'on a

$$\frac{\partial z}{\partial y}dx + a^2\frac{\partial z}{\partial x}dy = du.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{\partial z}{\partial y}dy + \frac{\partial z}{\partial x}dx = dz,$$

d'où l'on conclut, en ajoutant à la première de ces équations le produit de la seconde par a,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x}\right)d(x+ay) = d(u+az),$$

relation qui prouve [778] que $u+az$ et $\frac{\partial z}{\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x}$ ne peuvent être que des fonctions de $x+ay$. En changeant a en $-a$, on voit semblablement que $u-az$ et $\frac{\partial z}{\partial y} - a\frac{\partial z}{\partial x}$ ne peuvent être que des fonctions de $x-ay$. On a donc

$$u+az = \psi(x+ay), \quad u-az = \omega(x-ay),$$

d'où l'on tire

$$2az = \psi(x+ay) - \omega(x-ay),$$

ce qui est la même chose que l'intégrale générale trouvée au numéro précédent.

1066. Nous allons indiquer encore quelques exemples d'intégration d'équations aux dérivées partielles par des méthodes particulières.

I. Si l'équation proposée ne contient que les dérivées prises par rapport à une seule des variables indépendantes, on pourra considérer cette équation comme une équation différentielle ordinaire, dans laquelle l'autre variable joue le rôle d'un paramètre constant. Seulement, après l'intégration, on remplacera la constante arbi-

traire par une fonction arbitraire de la variable qui a joué le rôle de constante.

Ainsi, si l'on donne l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} + Pz = Q,$$

P et Q étant des fonctions de x et de y, son intégrale sera

$$z = e^{-\int P\,dx}\left[\varphi(y) + \int e^{\int P\,dx} Q\,\partial x\right],$$

$\varphi(y)$ étant une fonction arbitraire de x et de y.

L'équation

$$z = px + f(p),$$

qui se rapporte à l'équation de Clairaut [847], aura pour intégrale

$$z = Yx + f(Y),$$

Y désignant une fonction arbitraire de y.

De l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + X^2 z = 0,$$

où X est une fonction donnée de x, on tirera [893]

$$z = \varphi(x)\cos Xy + \chi(x)\sin Xy,$$

φ et χ désignant deux fonctions arbitraires.

II. Soit l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + ax^m + by^n = 0.$$

En multipliant par dx et intégrant par rapport à x, comme si y était une constante, il vient

$$\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{ax^{m+1}}{m+1} + bxy^n = \varphi(y).$$

Intégrant maintenant par rapport à y, considéré comme seule variable, et désignant par $\chi(y)$ la fonction arbitraire $\int\varphi(y)\,dy$, il vient

$$z + \frac{ax^{m+1}y}{m+1} + \frac{bxy^{n+1}}{n+1} = \chi(y) + \psi(x).$$

L'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + P\frac{\partial z}{\partial y} = Q,$$

P et Q étant des fonctions de x et de y, donne d'abord, en prenant $\frac{\partial z}{\partial y}$ pour la fonction inconnue,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-\int P\,dx}\varphi[(y) + \int e^{\int P\,dx} Q\,\partial x].$$

On en tire ensuite z en intégrant partiellement par rapport à y et ajoutant à l'intégrale une fonction arbitraire de x.

III. Considérons l'équation des surfaces développables [1046],

$$q = \varpi(p).$$

On en tire

$$dz = p\,dx + \varpi(p)\,dy,$$

d'où, en intégrant par parties,

$$z = px + \varpi(p)y - \int [x + y\,\varpi'(p)]\,dp,$$

ou, ce qui revient au même,

$$d[z - px - \varpi(p)y] = -[x + y\,\varpi'(p)]\,dp.$$

Il résulte de là, en vertu du théorème fondamental du n° 778, que les deux quantités $z - px - \varpi(p)y$ et $-x - y\,\varpi'(p)$ doivent être deux fonctions de p, dont la seconde est la dérivée de la première. On doit donc avoir

$$z - px - \varpi(p)y = \varphi(p), \quad -x - \varpi'(p)y = \varphi'(p),$$

et, par suite, la relation entre x, y, z s'obtient par l'élimination de α entre les deux équations

$$z = \alpha x + \varpi(\alpha)y + \varphi(\alpha), \quad 0 = x + \varpi'(\alpha)y + \varphi'(\alpha),$$

ce qui s'accorde avec ce que nous avons vu au n° 1057.

IV. Soit encore l'équation

$$F(x, p) = F_1(y, q).$$

Désignons par ω la valeur commune des deux membres. Des équa-

tions $F(x, p) = \omega$, $F_1(y, q) = \omega$ on tirera

$$p = \mathrm{f}(x, \omega), \quad q = f(y, \omega),$$

et par suite

$$dz = \mathrm{f}(x, \omega)\,dx + f(y, \omega)\,dy.$$

Si l'on pose maintenant, pour abréger,

$$X = \int \mathrm{f}(x, \omega)\,\partial x, \quad Y = \int f(y, \omega)\,\partial y,$$

on aura

$$dX = \mathrm{f}(x, \omega)\,dx + \frac{\partial X}{\partial \omega}\,d\omega, \quad dY = f(y, \omega)\,dy + \frac{\partial Y}{\partial \omega}\,d\omega,$$

d'où

$$dz = dX + dY - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega} + \frac{\partial Y}{\partial \omega}\right) d\omega.$$

On conclut de là que $z - X - Y$ et $-\left(\frac{\partial X}{\partial \omega} + \frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)$ sont deux fonctions de ω, dont l'une est la dérivée de l'autre. Donc l'intégrale de l'équation proposée est contenue dans l'ensemble des deux équations

$$z = X + Y + \varphi(\omega), \quad 0 = \frac{\partial X}{\partial \omega} + \frac{\partial Y}{\partial \omega} + \varphi'(\omega).$$

§ V.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE.

1067. On entend par *équation linéaire aux dérivées partielles* une équation dans laquelle les dérivées partielles de la fonction inconnue n'entrent qu'au premier degré, sans être multipliées entre elles.

Le problème de l'intégration d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre se ramène à celui de l'intégration d'un système d'équations simultanées aux différentielles ordinaires du premier ordre, et réciproquement.

Soit, en effet, un système de n équations différentielles du premier ordre,

$$(1) \qquad \frac{dt}{T} = \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \ldots,$$

entre les $n+1$ variables $t, x, y, \ldots$ et leurs différentielles. Supposons que l'on ait trouvé les intégrales générales de ce système et qu'on les ait résolues par rapport aux constantes arbitraires qu'elles renferment, en les mettant sous la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} C_1 = f_1(t, x, y, \ldots), \\ C_2 = f_2(t, x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

les fonctions $f_1, f_2, \ldots$ ne contenant plus aucune constante arbitraire. Ces fonctions $f_1, f_2, \ldots$, qui restent constantes en vertu des équations différentielles (1), s'appellent aussi elles-mêmes les *intégrales* des équations (1).

Toute fonction de $f_1, f_2, \ldots$, étant constante en même temps que $f_1, f_2, \ldots$, est aussi une *intégrale* des équations (1).

1068. Remarquons ensuite que les quantités T, X, Y, ... ne peuvent pas être toutes identiquement nulles, sans quoi il n'y aurait plus d'équations différentielles. De plus, elles ne peuvent pas devenir toutes nulles en vertu des équations (2). En effet, si la fonction T n'est pas identiquement nulle, l'équation $T = 0$ est une relation entre les variables qui ne contient aucune constante arbitraire, et qui ne peut subsister en même temps que les équations (2), puisque celles-ci doivent être telles que, pour $t = t_0$, on puisse donner à $x, y, \ldots$ telles valeurs que l'on voudra.

1069. Supposons donc que T, par exemple, soit différent de zéro (sauf pour des valeurs particulières de t). En différentiant la première des équations (2), il vient

$$(3) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial t} dt + \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \ldots = 0.$$

Mais, l'équation $C_1 = f_1$ étant une intégrale des équations (1), l'accroissement de f_1 doit être nul toutes les fois que $dt, dx, dy, \ldots$ seront proportionnels à T, X, Y, ..., quelle que soit la valeur de la variable indépendante t. On doit donc avoir, quel que soit t,

$$(4) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial t} T + \frac{\partial f_1}{\partial x} X + \frac{\partial f_1}{\partial y} Y + \ldots = 0.$$

Cette relation (4), ne contenant aucune constante arbitraire, ne peut être qu'une identité, sans quoi, par la raison que nous exposions dans le numéro précédent, elle serait incompatible avec les intégrales générales (2).

Donc toute intégrale des équations (1) est une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(5) \qquad T\frac{\partial f}{\partial t} + X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots = 0.$$

1070. Réciproquement, toute solution $f = f_1$ de l'équation (5), c'est-à-dire toute fonction f_1 de $t, x, y, \ldots$ qui vérifie identiquement l'équation (5), sera une intégrale des équations (1). En effet, on a

$$df_1 = dt\left(\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \ldots\right).$$

Or, si $x, y, \ldots$ sont des fonctions de t telles que l'on ait, quel que soit t,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{X}{T}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{Y}{T}, \quad \ldots,$$

on aura, T étant supposé ne pas s'annuler,

$$df_1 = \frac{dt}{T}\left(T\frac{\partial f_1}{\partial t} + X\frac{\partial f_1}{\partial x} + Y\frac{\partial f_1}{\partial y} + \ldots\right),$$

expression identiquement nulle, puisque f_1 satisfait à la relation (4). Donc on a

$$df_1 = 0, \quad f_1 = \text{const.},$$

lorsqu'on substitue dans f_1 des valeurs de $x, y, \ldots$ en fonction de t qui satisfont aux équations différentielles (1). Donc f_1 est une des intégrales de ces équations (1).

Si donc on a n solutions *distinctes* de l'équation (5), c'est-à-dire n solutions telles que la constance de l'une quelconque d'entre elles ne soit pas la conséquence de la constance des autres (ce dont on s'assurera en vérifiant que leur déterminant fonctionnel par rapport à $x, y, \ldots$ n'est pas nul), on aura les intégrales générales des équations (1) en égalant ces n solutions à des constantes arbitraires.

1071. Une fonction quelconque de $f_1, f_2, \ldots$, étant une intégrale des équations (1), sera aussi une solution de l'équation (5). C'est ce que l'on peut vérifier directement. Soit, en effet, F une fonction quelconque de $f_1, f_2, \ldots$. On a

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t} + \ldots,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En multipliant ces équations respectivement par T, X, ... et faisant la somme, chaque quantité $\frac{\partial F}{\partial f_i}$ se trouve multipliée, dans le second membre, par le résultat de la substitution de f_i à f dans le premier membre de (5), résultat qui est identiquement nul, puisque f_i est supposé être une solution de cette équation (5). Donc on a identiquement

$$T\frac{\partial F}{\partial t} + X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} + \ldots = 0,$$

c'est-à-dire que F est une solution de l'équation (5).

1072. Réciproquement, toute solution F de l'équation (5) est une fonction des n solutions distinctes

$$f_1, f_2, \ldots, f_n,$$

qui, égalées à des constantes, donnent les intégrales complètes des équations (1). En effet, des n équations qui lient ces fonctions $f_1, f_2, \ldots$ aux variables $t, x, y, \ldots$ on peut tirer les valeurs des n variables $x, y, \ldots$ en fonction de la $(n+1)^{\text{ième}}$ t et de $f_1, f_2, \ldots, f_n$, et, en substituant ces valeurs dans la solution proposée F, celle-ci prendra la forme

$$F(t, f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Puisqu'elle satisfait à l'équation (5), on devra avoir identiquement l'égalité

$$\left.\begin{aligned} &T\frac{\partial F}{\partial t} + T\left(\frac{\partial F}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t} + \ldots\right) \\ &\quad + X\left(\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x} + \ldots\right) \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} = 0.$$

Comme $f_1, f_2, \ldots$ sont des solutions de (5), cette égalité se réduit à

$$T\frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

ou simplement, T étant différent de zéro, à

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Donc, si la fonction F satisfait à l'équation (5), elle ne peut contenir explicitement t après l'élimination de $x, y, \ldots$; elle ne dépend donc que des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Donc, si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont les n intégrales du système (1), la solution la plus générale de l'équation (5) sera

$$f = \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n),$$

φ étant une fonction arbitraire. Ainsi, étant donnée une équation aux dérivées partielles du premier ordre (5), linéaire par rapport aux dérivées partielles, et ne contenant ni la fonction f elle-même explicitement ni aucun terme indépendant des dérivées partielles, on aura son intégrale générale, en prenant pour f une fonction arbitraire des n intégrales du système (1) d'équations simultanées aux différentielles ordinaires.

1073. Soit maintenant une équation linéaire par rapport aux dérivées partielles de la fonction inconnue t, mais contenant un terme indépendant de ces dérivées, et dans laquelle la fonction t entre explicitement d'une manière quelconque,

$$(7) \qquad T = X\frac{\partial t}{\partial x} + Y\frac{\partial t}{\partial y} + \ldots,$$

chacune des quantités T, X, Y, ... étant une fonction de $t, x, y, \ldots$. Si l'on représente par $f(t, x, y, \ldots)$ une solution de l'équation (5), la valeur de t en $x, y, \ldots$, déterminée par l'équation

$$(8) \qquad f(t, x, y, \ldots) = 0,$$

que l'on obtient en égalant cette solution à zéro, sera une solution

de l'équation (7). En effet, on tire de l'équation (8)

$$(9)\qquad \frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}}, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}}, \quad \ldots,$$

d'où, en substituant dans l'équation (7) et remarquant que $\frac{\partial f}{\partial t}$ ne doit pas être nul,

$$(10)\qquad \frac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial t}}\left(\mathrm{T}\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{X}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{Y}\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots\right) = 0,$$

équation qui est identiquement vérifiée, puisque f est une solution de l'équation (5). Donc la valeur de t, tirée de l'équation (8) que l'on obtient en égalant à zéro une solution quelconque de l'équation (5), satisfait identiquement à l'équation (7).

Un raisonnement tout semblable au précédent montrerait que, si, au lieu de tirer t de l'équation (8), on le tirait de l'équation plus générale

$$(11)\qquad f(t, x, y, \ldots) = \alpha,$$

où α est une constante arbitraire, la valeur de t déduite de cette nouvelle équation satisferait identiquement à l'équation (7). En effet, les calculs précédents ne seraient changés en rien, la constante α disparaissant dans la différentiation.

1074. Réciproquement, si la valeur de t tirée d'une relation de la forme

$$(11)\qquad f(t, x, y, \ldots) = \alpha$$

satisfait à l'équation aux dérivées partielles (7) *quelle que soit la constante* α, le premier membre de l'équation (11) sera une solution de l'équation (5).

En effet, si l'on tire de l'équation (11) les valeurs (9) de $\frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}, \ldots,$ et qu'on les substitue dans l'équation (7), on devra

avoir l'égalité (10), d'où l'on conclut

$$(12) \qquad T\frac{\partial f}{\partial t} + X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots = 0,$$

relation qui doit avoir lieu identiquement, quels que soient $x, y, \ldots$, du moins si l'on y remplace t par sa valeur tirée de (11), et quelle que soit la valeur de la constante α.

Mais, comme l'équation (11) contient cette constante α, on pourra attribuer aux variables $t, x, y, \ldots$ un système de valeurs quelconques $t_0, x_0, y_0, \ldots$, et il suffira pour cela de déterminer la valeur de la constante α par la condition

$$\alpha = f(t_0, x_0, y_0, \ldots).$$

L'équation (12), qui ne contient pas la constante α, devra donc pouvoir être vérifiée quelles que soient les valeurs attribuées aux quantités $t, x, y, \ldots$.

D'après cela, considérons une solution non singulière de l'équation (7), contenant au moins une constante arbitraire α,

$$t = \varpi(x, y, \ldots, \alpha).$$

En résolvant cette équation par rapport à α, on aura une relation de la forme

$$\alpha = f(t, x, y, \ldots),$$

et la fonction f ainsi déterminée sera une solution de l'équation homogène aux dérivées partielles (5).

Donc toute solution de l'équation (7) contenant au moins une constante arbitraire s'obtient en égalant à une constante arbitraire une solution de l'équation (5).

1075. On voit donc que l'intégration de l'équation (7) entre la fonction t et les n variables indépendantes $x, y, \ldots$, linéaire par rapport aux dérivées partielles de t, mais contenant t explicitement d'une manière quelconque dans ses coefficients et ayant un terme indépendant des dérivées partielles, peut se ramener à l'intégration de l'équation linéaire

$$(12) \qquad T\frac{\partial f}{\partial t} + X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots = 0,$$

d'une forme moins générale, où l'inconnue f dépend d'une variable indépendante de plus, mais où cette fonction f n'entre que par ses dérivées partielles, et qui ne contient pas de terme indépendant de ces dérivées partielles.

Ayant trouvé l'intégrale générale

$$f = \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

de l'équation (12), on en conclura que l'intégrale générale de l'équation

$$(7) \qquad T = X\frac{\partial t}{\partial x} + Y\frac{\partial t}{\partial y} + \ldots$$

est donnée par l'équation

$$(13) \qquad \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0.$$

On l'obtiendra donc en cherchant les intégrales $f_1, f_2, \ldots, f_n$ du système des équations (1) et en établissant entre ces intégrales une relation arbitraire.

1076. On voit, d'après cela, que, si l'on considère :

1° Les n équations simultanées aux différentielles ordinaires du premier ordre

$$(1) \qquad \frac{dt}{T} = \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \ldots,$$

entre les $n+1$ variables $t, x, y, \ldots$;

2° L'équation différentielle unique du $n^{\text{ième}}$ ordre entre deux variables, que l'on déduirait du système (1) par des différentiations et des éliminations [935], et dont l'intégration équivaudrait à celle des équations (1);

3° L'équation aux dérivées partielles du premier ordre, linéaire par rapport aux dérivées partielles et où la fonction inconnue n'entre pas explicitement, le nombre des variables indépendantes étant $n+1$ et l'équation ne contenant pas de terme indépendant des dérivées partielles,

$$(5) \qquad T\frac{\partial f}{\partial t} + X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots = 0;$$

4° L'équation linéaire par rapport aux dérivées partielles, ayant

un terme indépendant de ces dérivées et n variables indépendantes seulement, et où la fonction inconnue entre explicitement d'une manière quelconque,

$$T = X \frac{\partial t}{\partial x} + Y \frac{\partial t}{\partial y} + \ldots; \tag{7}$$

La résolution de ces quatre problèmes dépend de la recherche des mêmes fonctions indépendantes $f_1, f_2, \ldots, f_n$, qui sont des intégrales des équations (1) ou des solutions de l'équation (5), ou qui, égalées à zéro ou à une constante arbitraire, fournissent chacune une solution de l'équation (7).

1077. Appliquons ces règles à quelques exemples, entre autres aux équations aux dérivées partielles de quelques familles de surfaces.

I. Soit l'équation des surfaces cylindriques [1025]

$$ap + bq = 1.$$

On ramène la question à l'intégration des équations simultanées

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1},$$

qui donnent les deux intégrales

$$x - az = C_1, \quad y - bz = C_2.$$

En établissant une relation arbitraire entre ces deux intégrales, on a, pour l'équation générale des surfaces cylindriques,

$$\varphi(x - az, y - bz) = 0.$$

II. Étant donnée l'équation des surfaces coniques [1028]

$$(x - a)p + (y - b)q = z - c,$$

on est conduit à intégrer les équations

$$\frac{dx}{x - a} = \frac{dy}{y - b} = \frac{dz}{z - c},$$

ce qui donne les intégrales

$$\frac{x-a}{z-c}=C_1, \quad \frac{y-b}{z-c}=C_2.$$

On en conclut, pour l'équation finie des surfaces coniques,

$$\varphi\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)=0.$$

III. Considérons l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution autour de l'axe des z [1034],

$$\frac{p}{x}-\frac{q}{y}=0.$$

En intégrant les équations différentielles

$$x\,dx=-y\,dy=\frac{dz}{0},$$

on aura les intégrales

$$x^2+y^2=C_1, \quad z=C_2,$$

d'où l'on tire, pour l'équation finie de ces surfaces,

$$z=\varphi(x^2+y^2).$$

IV. Si nous prenons l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution autour d'une droite quelconque,

$$(y-b-Bz)p-(x-a-Az)q=B(x-a)-A(y-b),$$

nous aurons à intégrer le système

$$\frac{dx}{y-b-Bz}=\frac{dy}{-(x-a)+Az}=\frac{dz}{B(x-a)-A(y-b)}$$
$$=\frac{A\,dx+B\,dy}{A(y-b)-B(x-a)}=\frac{(x-a)dx+(y-b)dy}{[-B(x-a)+A(y-b)]z},$$

d'où l'on tire

$$A\,dx+B\,dy+dz=0, \quad (x-a)dx+(y-b)dy+z\,dz=0,$$

et par suite

$$Ax+By+z=C_1, \quad (x-a)^2+(y-b)^2+z^2=C_2.$$

Donc l'équation finie de ces surfaces est

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=\varphi(Ax+By+z).$$

V. L'équation aux dérivées partielles des conoïdes qui ont l'axe des z pour directrice et le plan des xy pour plan directeur est [1031]

$$px+qy=0,$$

ce qui conduit aux équations différentielles

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{0},$$

dont les intégrales sont

$$\frac{y}{x}=C_1,\quad z=C_2,$$

et, par suite, l'équation finie de ces surfaces sera

$$z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

VI. Prenons l'équation qui exprime le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes [322] :

$$x\frac{\partial t}{\partial x}+y\frac{\partial t}{\partial y}+z\frac{\partial t}{\partial z}+\ldots=mt.$$

On aura à intégrer les équations différentielles

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}=\ldots=\frac{dt}{mt},$$

d'où l'on tire les intégrales

$$\frac{y}{x}=C_1,\quad \frac{z}{x}=C_2,\quad \ldots,\quad \frac{t}{x^m}=C_n;$$

on a donc, pour la valeur générale de la fonction t,

$$t=x^m\varphi\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x},\ \ldots\right).$$

Donc le théorème d'Euler suffit pour caractériser les fonctions homogènes.

VII. Étant donnée une équation différentielle d'ordre n,

$$(1) \qquad \frac{d^n x}{dt^n} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}\right),$$

on peut la remplacer par les n équations différentielles simultanées [935]

$$(2) \qquad dt = \frac{dx}{x'} = \frac{dx'}{x''} = \ldots = \frac{dx^{(n-1)}}{F(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)})}.$$

Or ce sont là les équations dont l'intégration conduit à celle de l'une ou l'autre des équations aux dérivées partielles

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + x' \frac{\partial f}{\partial x} + x'' \frac{\partial f}{\partial x'} + \ldots + F(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \frac{\partial f}{\partial x^{(n-1)}} = 0,$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial x^{(n-1)}}{\partial t} + x' \frac{\partial x^{(n-1)}}{\partial x} + x'' \frac{\partial x^{(n-1)}}{\partial x'} + \ldots \\ &\qquad + x^{(n-1)} \frac{\partial x^{(n-1)}}{\partial x^{(n-2)}} = F(t, x, \ldots, x^{(n-1)}). \end{aligned} \right.$$

L'intégration de l'un quelconque des systèmes (1), (2), (3), (4) fera connaître immédiatement les intégrales des trois autres.

1078. Lorsqu'on a intégré une équation linéaire homogène aux dérivées partielles de la forme de l'équation (5) [1049],

$$(1) \qquad T \frac{\partial f}{\partial t} + X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + \ldots = 0,$$

T, X, Y, ... étant des fonctions des seules variables indépendantes $t, x, y, \ldots$, on peut, par une simple quadrature, obtenir l'intégrale de l'équation à second membre

$$(2) \qquad T \frac{\partial F}{\partial t} + X \frac{\partial F}{\partial x} + Y \frac{\partial F}{\partial y} + \ldots = V,$$

V étant une nouvelle fonction de $t, x, y, \ldots$.

Soient, en effet, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ les n solutions particulières distinctes dont la valeur générale de f est une fonction arbitraire [1072]. Nous avons vu [1072] que, si l'on exprime une fonction quelconque F de $t, x, y, \ldots$ au moyen de t et des n variables f_1,

$f_2, \ldots, f_n$, le premier membre de l'équation (2) se réduit à

$$T\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right),$$

en entourant de parenthèses la dérivée par rapport à t de la fonction F lorsque celle-ci est exprimée au moyen de $t, f_1, \ldots, f_n$. Donc l'équation (2) se réduira à

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) = \frac{V}{T},$$

d'où l'on tire

$$F = \int \frac{V}{T}\,\partial t + \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n), \tag{3}$$

φ désignant une fonction arbitraire, et l'intégration se faisant partiellement par rapport à t, dans la supposition où l'on a exprimé $\frac{V}{T}$ en fonction de $t, f_1, \ldots, f_n$.

On peut mettre cette intégrale partielle sous une autre forme. Si l'on suppose

$$\frac{V}{T} = \mathrm{f}(t, f_1, \ldots, f_n),$$

on pourra écrire

$$\int \frac{V}{T}\,\partial t = \int_{t_0}^{t} \mathrm{f}(\theta, f_1, \ldots, f_n)\,d\theta, \tag{4}$$

t_0 étant une quantité quelconque indépendante de t et pouvant dépendre de $f_1, \ldots, f_n$; à l'aide de cette notation on pourra, si l'on veut, remettre dans $\mathrm{f}(\theta, f_1, \ldots, f_n)$, à la place de $f_1, \ldots, f_n$, leurs valeurs en $t, x, y, \ldots$.

On voit que l'intégrale (3) de l'équation (2) se compose d'une intégrale particulière (4) de cette équation, plus de l'intégrale générale $\varphi(f_1, \ldots, f_n)$ de l'équation sans second membre (1), ce qui est analogue à ce que nous avons vu pour les équations linéaires à une seule variable indépendante [901].

Exemple. — Considérons le reste de la série de Taylor,

$$F = \psi(x+h) - \psi(x) - \frac{h}{1}\psi'(x) - \ldots - \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\psi^{(n-1)}(x).$$

En différentiant cette expression successivement par rapport à x et à h, il vient

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial h} = -\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\psi^{(n)}(x).$$

Pour intégrer cette équation, on intégrera d'abord l'équation sans second membre

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial h} = 0,$$

qui donne [1062] $f = \varphi(f_1)$, f_1 représentant la solution particulière

$$f_1 = x + h.$$

Si l'on introduit f_1 comme variable au lieu de h, il vient

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = -\frac{(f_1 - x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\psi^{(n)}(x),$$

d'où, en intégrant et désignant par x_0 une fonction de la quantité f_1 considérée comme constante, on tire, à la fonction arbitraire près,

$$F = -\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_{x_0}^{x}(f_1 - x)^{n-1}\psi^{(n)}(x)\partial x.$$

En mettant, dans le second membre, ξ au lieu de x, puis remplaçant f_1 par $x+h$, il viendra

$$F = -\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_{x_0}^{x}(x + h - \xi)^{n-1}\psi^{(n)}(\xi)\,d\xi.$$

Si l'on pose

$$x + h - \xi = t,$$

d'où, pour $\xi = x_0$, $t = x + h - x_0 = f_1 - x_0$ et, pour $\xi = x$, $t = h$, on pourra, pour plus de simplicité, prendre $x_0 = f_1$, et la valeur de F deviendra, en rétablissant la fonction arbitraire de f_1,

$$F = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^h t^{n-1}\psi^{(n)}(x + h - t)\,dt + \varphi(x+h).$$

Or la fonction F doit, par définition, s'annuler avec h, quel que soit x. On a donc $\varphi(x) = 0$, et par suite $\varphi(x+h) = 0$, ce qui donne la forme connue du reste F [360].

§ VI.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE DANS LE CAS DE DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES.

1079. Soit donnée une équation non linéaire aux dérivées partielles du premier ordre

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{1}$$

p et q représentant les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$. Il s'agit de trouver une fonction z de x et de y, telle que sa valeur et celles de ses deux dérivées partielles satisfassent identiquement à l'équation (1).

Nous avons vu [1053, 1055] que l'on peut déterminer la solution la plus générale de l'équation (1), et même la solution singulière, dès que l'on connaît l'*intégrale complète,* c'est-à-dire une fonction z de x et de y renfermant deux constantes arbitraires et satisfaisant à l'équation (1) quelles que soient ces constantes. Or, si l'on connaissait les fonctions p et q exprimées au moyen de x, y, z et d'une constante arbitraire α, la condition

$$dz = p\,dx + q\,dy, \tag{2}$$

qui exprime que p et q sont égales aux dérivées partielles de z par rapport à x et à y, donnerait, par son intégration, la valeur de z en fonction de x, y, α et d'une nouvelle constante arbitraire β.

Or les valeurs de p et de q sont assujetties seulement aux deux conditions suivantes : 1° de satisfaire identiquement à l'équation (1); 2° de rendre intégrable [1011] l'équation aux différentielles totales (2).

1080. Soit

$$\varpi(x, y, z, p, q) = \alpha \tag{3}$$

la relation inconnue entre x, y, z, p, q qui, jointe à l'équation (1), doit déterminer pour p et q des valeurs en x, y, z, α qui rendent intégrable l'équation (2). En différentiant les équations (1) et (3)

par rapport à x et à y, et posant, pour abréger,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \ldots,$$

il vient

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \varpi}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varpi}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varpi}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial \varpi}{\partial y}\right) + \frac{\partial \varpi}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial \varpi}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right) = 0.$$

En éliminant $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$ entre les deux équations de gauche, et $\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)$ entre les deux équations de droite, il vient

$$\frac{\partial \varpi}{\partial p}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) - \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial \varpi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \varpi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \varpi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \varpi}{\partial q}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial \varpi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \varpi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \varpi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0$$

Dans ces deux équations, le multiplicateur commun de $\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$ et de $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)$ est le déterminant fonctionnel des équations (1) et (3). Il ne saurait donc être nul [**316**], si, comme on doit le supposer, ces équations sont résolubles par rapport à p et à q. Or la condition d'intégrabilité de l'équation (2) est

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right).$$

Pour qu'elle soit remplie, il faut et il suffit, en vertu des deux équations précédentes, que la fonction ϖ satisfasse à la condition

$$\frac{\partial \varpi}{\partial p}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) - \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial \varpi}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varpi}{\partial q}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial \varpi}{\partial y}\right) = 0,$$

ou, en développant les dérivées entourées de parenthèses,

$$(4)\quad \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \varpi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \varpi}{\partial y} + \left(p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial \varpi}{\partial z} - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{\partial \varpi}{\partial p} - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{\partial \varpi}{\partial q} = 0,$$

equation linéaire aux dérivées partielles de la forme générale que nous avons considérée aux nos **1069-1072**. En prenant une solution

particulière quelconque ϖ_1 de cette équation et l'égalant à une constante α, les valeurs de p et de q tirées des équations

$$F = 0, \quad \varpi_1 = \alpha$$

rendront l'équation (2) intégrable.

Pour avoir une solution particulière de l'équation (4), il suffira de déterminer une quelconque des intégrales du système d'équations aux différentielles ordinaires

$$(5)\quad \frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dp}{-\frac{\partial F}{\partial x} - p\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{dq}{-\frac{\partial F}{\partial y} - q\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

1081. *Exemples.* — I. Soit l'équation

$$z = pq.$$

Les équations (5) deviennent, dans ce cas,

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}.$$

En égalant le premier et le dernier de ces rapports, il vient

$$dx = dq, \quad \text{d'où} \quad q = x + \alpha,$$

et par suite, en vertu de l'équation proposée,

$$p = \frac{z}{x + \alpha}.$$

L'équation (2) devient alors

$$dz = \frac{z}{x + \alpha}dx + (x + \alpha)\,dy,$$

d'où l'on tire d'abord, en faisant $dy = 0$,

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x + \alpha}, \quad z = (x + \alpha)\,\mathrm{Y}.$$

Substituant maintenant cette valeur après avoir fait $dx = 0$, il vient

$$(x + \alpha)\,d\mathrm{Y} = (x + \alpha)\,dy, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{Y} = y + \beta.$$

Donc on a, pour la solution complète de l'équation proposée,

$$z = (x + \alpha)(y + \beta).$$

Pour avoir la solution générale, on éliminera α entre les deux équations

$$z = (x + \alpha)[y + \varphi(\alpha)], \quad 0 = (x + \alpha)\varphi'(\alpha) + y + \varphi(\alpha).$$

Enfin, la solution singulière sera

$$z = 0.$$

On pourrait employer une autre intégrale quelconque du système d'équations différentielles, par exemple, la solution tirée de l'équation

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}, \quad \text{savoir} \quad \frac{q}{p} = a^2,$$

d'où

$$z = a^2 p^2, \quad p = \frac{\sqrt{z}}{a}, \quad q = a\sqrt{z},$$

$$dz = \frac{\sqrt{z}}{a} dx + a\sqrt{z}.dy,$$

et, en intégrant,

$$2\sqrt{z} = \frac{x}{a} + ay + b,$$

autre forme de la solution complète.

II. Soit l'équation des surfaces développables

$$q = f(p).$$

Les équations (5) deviennent

$$\frac{dx}{f'(p)} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{pf'(p) - q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}.$$

On a une intégrale de ces équations en posant

$$p = \alpha, \quad \text{d'où} \quad q = f(\alpha),$$

et par suite

$$dz = \alpha\,dx + f(\alpha)\,dy,$$
$$z = \alpha x + f(\alpha) y + \beta,$$

équation d'un plan, qui représente la solution complète.

III. Soit proposée l'équation

$$(p^2+q^2)y=qz.$$

Les équations (5) deviennent

$$\frac{dx}{2py}=\frac{dy}{2qy-z}=\frac{dz}{2(p^2+q^2)y-qz}=\frac{dp}{pq}=\frac{dq}{-p^2}.$$

Le dénominateur de dz étant égal à qz en vertu de l'équation proposée, on pourrait remplacer les dernières équations par

$$\frac{dz}{qz}=\frac{dp}{pq}=\frac{dq}{-p^2}.$$

L'égalité des deux derniers rapports donne

$$p\,dp+q\,dq=0, \quad \text{d'où} \quad p^2+q^2=\alpha^2,$$

$$q=\frac{\alpha^2 y}{z}, \quad p=\frac{\alpha}{z}\sqrt{z^2-\alpha^2y^2},$$

$$dz=\frac{\alpha}{z}\sqrt{z^2-\alpha^2y^2}.dx+\frac{\alpha^2y}{z}dy.$$

En faisant $dx=0$, il vient

$$z\,dz=\alpha^2y\,dy, \quad \text{d'où} \quad z^2=\alpha^2y^2+X.$$

Substituant cette valeur dans l'équation $z\,d_xz=\alpha\sqrt{z^2-\alpha^2y^2}.dx$, il vient

$$\frac{1}{2}dX=\alpha\sqrt{X}.dx, \quad \text{d'où} \quad \sqrt{X}=\alpha x+\beta,$$

et, par suite, la solution complète de l'équation proposée est

$$z=\alpha^2y^2+(\alpha x+\beta)^2.$$

IV. Prenons encore l'équation

$$p(q^2+1)+(b-z)q=0.$$

Les équations (5) seront ici

$$\frac{dx}{q^2+1}=\frac{dy}{2pq+bz}=\frac{dz}{3pq^2+p+(b-z)q}=\frac{dp}{pq}=\frac{dq}{q^2}.$$

De l'équation

$$\frac{dx}{q^2+1} = \frac{dq}{q^2}$$

on tire

$$x+\alpha = q - \frac{1}{q},$$

ce qui donne

$$q = \frac{x+\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)^2+1}, \quad \frac{1}{q} = -\frac{x+\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)^2+1},$$

d'où

$$q+\frac{1}{q} = 2\sqrt{\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)^2+1}, \quad p = \frac{z-b}{q+\frac{1}{q}} = \frac{z-b}{2\sqrt{\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)^2+1}},$$

$$dz = \frac{(z-b)\,dx}{2\sqrt{\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)^2+1}} + \left[\frac{x+\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)^2+1}\right] dy.$$

Multipliant cette équation par $-\frac{x+\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{q}$, il vient

$$dz\left[\frac{x+\alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)^2+1}\right]$$
$$+ (z-b)dx\left[\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}(x+\alpha)}{2\sqrt{\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)^2+1}}\right] + dy = 0;$$

le premier membre étant une différentielle exacte, on en tire, en intégrant, la solution complète de l'équation proposée

$$(z-b)\left[\frac{x+\alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)^2+1}\right] + y + \beta = 0.$$

On peut trouver une autre forme de la solution complète en partant de l'équation $\frac{dp}{pq} = \frac{dq}{q^2}$, qui donne

$$q = \alpha p,$$

d'où

$$p = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha(z-b)-1}, \quad q = \sqrt{\alpha(z-b)-1},$$

$$dz = \left(\frac{dx}{\alpha} + dy\right)\sqrt{\alpha(z-b)-1},$$

équation où les variables sont séparables et qui donne, par l'intégration,

$$2\sqrt{\alpha(z-b)-1} = x + \alpha y + \beta.$$

§ VII.

DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE QUELCONQUE.

1082. Considérons une équation linéaire par rapport aux dérivées partielles de la fonction inconnue z, de la forme

$$(1) \qquad P\frac{\partial^m z}{\partial x^m} + \ldots + Q\frac{\partial^{n+p} z}{\partial x^n \partial y^p} + \ldots = 0,$$

P, Q, ... étant des fonctions des seules variables indépendantes x, y, que nous supposerons, pour plus de simplicité, au nombre de deux. Une telle équation jouit de propriétés analogues à celles d'une équation linéaire à une seule variable indépendante sans second membre [877]. Ainsi :

1° Si une certaine valeur $z = z_1$ satisfait à cette équation, la même valeur multipliée par une constante quelconque satisfera encore à la même équation;

2° Si l'on connaît des solutions, en nombre quelconque, z_1, z_2, ... de l'équation (1), leur somme $z_1 + z_2 + \ldots$ sera encore une solution de cette équation;

3° Par conséquent, en faisant la somme de ces mêmes solutions, multipliées respectivement par des constantes quelconques, l'expression obtenue $C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots$ sera encore une solution.

Si donc on peut découvrir une infinité de solutions de l'équation (1), en faisant la somme de leurs produits par des constantes arbitraires, la limite de cette somme sera une solution plus générale, qui se présentera sous la forme soit de la somme d'une série infinie, soit d'une intégrale définie.

1083. Considérons le cas le plus simple, celui d'une équation linéaire à coefficients P, Q, ... constants. Nous avons vu [889] que, dans le cas analogue relatif à une seule variable indépendante, une équation linéaire à coefficients constants est vérifiée par une valeur de la forme e^{rx}, r étant une constante convenablement déterminée. Les choses se passent d'une manière analogue dans les équations à plusieurs variables indépendantes.

Dans le cas d'une équation linéaire aux différentielles ordinaires d'ordre m, r est une racine d'une équation algébrique de degré m, et, en ajoutant les solutions $e^{r_1 x}$, $e^{r_2 x}$, ..., correspondantes aux m racines (inégales) de cette équation, ces solutions étant multipliées chacune par une constante arbitraire, on aura l'intégrale générale de l'équation différentielle [891].

Nous suivrons ici une marche analogue, et nous poserons, dans le cas de deux variables indépendantes,

$$z = e^{rx+sy},$$

r et s étant deux constantes indéterminées. En substituant cette valeur dans l'équation (1), l'exponentielle disparaîtra comme facteur commun, et il restera une équation algébrique entre r et s,

$$(2) \qquad \mathrm{P}r^m + \ldots + \mathrm{Q}r^n s^p + \ldots = 0,$$

d'un certain degré ν par rapport à s, et d'où l'on tirera, pour s, ν valeurs en fonction de r, de la forme

$$(3) \qquad s_1 = f_1(r), \quad s_2 = f_2(r), \quad \ldots, \quad s_\nu = f_\nu(r).$$

Chacune de ces valeurs donnera lieu à une intégrale particulière, telle que

$$(4) \qquad z = \mathrm{C}e^{rx+f(r)y},$$

C étant une constante arbitraire et r une quantité entièrement indéterminée.

Pour une même détermination $f(r)$ de s, on peut prendre arbitrairement C et r, et, en faisant la somme des valeurs de z correspondantes à divers systèmes de valeurs de ces quantités, on aura une solution de l'équation proposée. Pour arriver à la solution la plus générale, il y a deux moyens principaux de généralisation.

1084. I. On donne à r une suite de valeurs, en nombre infini, en assujettissant r à certaines conditions dépendant de la nature particulière du problème qui a donné naissance à l'équation proposée. Par exemple, on prendra pour r des valeurs en progression arithmétique, ou, ce qui revient au même, des valeurs égales aux diverses racines d'une équation transcendante, telle que

$$\sin\left(k\frac{r}{l}\right) = 0,$$

ou, plus généralement, on prendra pour r les diverses racines d'une équation transcendante plus compliquée, telle que l'équation

$$\operatorname{tang} hr = kr.$$

On obtient ainsi pour z une valeur, développée en série infinie, dont les coefficients C seront encore arbitraires, les propriétés de cette série dépendant de l'équation dont les valeurs de r sont les racines De plus, en disposant convenablement des coefficients C, on pourra faire en sorte que, pour $x = x_0$, par exemple, z devienne égale à une fonction de y donnée arbitrairement.

Chacune des valeurs (3) de s en fonction de r donne lieu à un développement analogue, de sorte que la valeur de z, formée par la somme de ces ν développements, renfermera ν fonctions arbitraires.

1085. Prenons pour exemple l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

que l'on rencontre dans la théorie de la chaleur, et supposons que la fonction z soit assujettie à certaines conditions aux limites, savoir, que l'on ait :

(1°) pour $x = 0$, $\quad z = 0$;

(2°) pour $x = b$, $\quad \dfrac{\partial \frac{z}{x}}{\partial x} + h\dfrac{z}{x} = 0$;

(3°) pour $y = 0$, $\quad z = F(x)$.

Si nous posons $(i = \sqrt{-1})$

$$z = \mathrm{C}e^{irx+sy},$$

il viendra, en substituant dans l'équation proposée,

$$s = -a^2 r^2,$$

et par suite

$$z = e^{-a^2r^2y}.\mathrm{C}e^{irx},$$

ou, en ajoutant deux déterminations convenables de cette solution,

$$z = e^{-a^2r^2y}(\mathrm{A}\sin rx + \mathrm{B}\cos rx).$$

La condition (1°) fait voir que la constante B doit être nulle, ce qui réduit la valeur de z à

$$z = e^{-a^2r^2y}\,\mathrm{A}\sin rx.$$

En mettant cette valeur dans la condition (2°),

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{x=b} + \left(h - \frac{1}{b}\right)[z]_{x=b} = 0,$$

elle donnera

$$r\cos br + \left(h - \frac{1}{b}\right)\sin br = 0,$$

ou enfin

$$\frac{br}{\operatorname{tang} br} = 1 - bh.$$

Cette relation fera connaître les valeurs de br qui conviennent à l'équation, valeurs qui sont données par les intersections de la droite $y = \dfrac{x}{1 - bh}$ avec la courbe $y = \operatorname{tang} x$. Soient $r_1, r_2, \ldots$ les valeurs de r, en nombre infini, que l'on obtient par la résolution de cette équation transcendante. En ajoutant les valeurs correspondantes de z, multipliées par des constantes arbitraires, on aura la valeur plus générale de z :

$$z = \mathrm{A}e^{-a^2r_1^2y}\sin r_1x + \mathrm{A}_2e^{-a^2r_2^2y}\sin r_2x + \ldots.$$

On voit, par une discussion facile, que les racines $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ finissent, pour des indices n suffisamment grands, par

croître par intervalles sensiblement égaux à $\frac{\pi}{b}$, de sorte que chaque terme contient, de plus que le précédent, un facteur à peu près égal à

$$e^{-a^2y\left[\left(r+\frac{\pi}{b}\right)^2-r^2\right]} \quad \text{ou à} \quad e^{-a^2y\frac{\pi}{b}\left(2r+\frac{\pi}{b}\right)},$$

lequel tend vers zéro pour r croissant. Donc, pour y positif, le développement est convergent, toutes les fois que les coefficients $A_1, A_2, \ldots$ ne croissent pas indéfiniment.

Pour satisfaire maintenant à la troisième condition aux limites, il faut déterminer les coefficients $A_1, A_2, \ldots$ de manière que l'on ait, quel que soit x,

$$F(x) = A_1 \sin r_1 x + A_2 \sin r_2 x + \ldots.$$

Pour obtenir la valeur d'un quelconque des coefficients A, du premier par exemple, multiplions l'égalité précédente par $\sin r_1 x\,dx$, et intégrons les deux membres entre les limites zéro et b; il viendra, pour un terme quelconque correspondant à deux indices inégaux,

$$\begin{aligned}
\int \sin r_1 x \sin r_2 x\,dx &= \frac{1}{2}\int [\cos(r_2 - r_1)x - \cos(r_2 + r_1)x]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{\sin(r_2-r_1)x}{r_2-r_1} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin(r_2+r_1)x}{r_2+r_1} + C \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{1}{r_2^2-r_1^2}\Big\{r_2[\sin(r_2-r_1)x - \sin(r_2+r_1)x] \\
&\qquad + r_1[\sin(r_2-r_1)x + \sin(r_2+r_1)x]\Big\} + C \\
&= \frac{1}{r_2^2-r_1^2}(-r_2 \sin r_1 x \cos r_2 x + r_1 \sin r_2 x \cos r_1 x) + C,
\end{aligned}$$

et par suite, en prenant pour limites zéro et b,

$$\int_0^b \sin r_1 x \sin r_2 x\,dx = \frac{-r_2 \sin br_1 \cos br_2 + r_1 \sin br_2 \cos br_1}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Or de l'équation

$$\frac{br_1}{\operatorname{tang} br_1} = 1 - bh = \frac{br_2}{\operatorname{tang} br_2},$$

à laquelle doivent satisfaire les racines r_1 et r_2, on tire

$$r_1 \cos br_1 \sin br_2 = r_2 \cos br_2 \sin br_1,$$

d'où il s'ensuit que l'intégrale précédente est nulle, quelle que soit la racine r_2, différente de r_1.

On a, d'autre part,

$$\int_0^b \sin^2 r_1 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^b (1 - \cos 2 r_1 x)\, dx = \frac{b}{2} - \frac{\sin 2 b r_1}{4 r_1}.$$

On en conclut

$$A_1 = \frac{2}{b - \dfrac{\sin 2 b r_1}{2 r_1}} \int_0^b F(x) \sin r_1 x\, dx.$$

On déterminera de la même façon les autres coefficients A_2, A_3, ... De cette manière, on aura le développement en série convergente d'une fonction satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles et à toutes les conditions initiales.

1086. On peut, dans certains cas, obtenir par cette méthode la solution générale de l'équation (1) sous forme finie. Supposons que la fonction $f(r)$ soit linéaire par rapport à r, de sorte qu'on ait

$$s = ar + b,$$

ce qui a lieu en particulier lorsque l'équation entre r et s est homogène, et qu'on en tire par conséquent des valeurs constantes pour le rapport $\frac{s}{r}$. Il vient alors

$$z = C e^{rx + (ar+b)y} = C e^{by} e^{r(x+ay)}.$$

Le facteur e^{by} restant le même, quels que soient C et r, on aura, en faisant la somme d'un nombre quelconque de solutions particulières,

$$z = e^{by}\left(C_1 e^{r_1(x+ay)} + C_2 e^{r_2(x+ay)} + \ldots\right).$$

Si l'on fait pour un instant $e^{x+ay} = u$, on verra que la série entre parenthèses, qui est de la forme $C_1 u^{r_1} + C_2 u^{r_2} + \ldots$, a des coefficients et des exposants arbitraires, et peut représenter, par conséquent, une fonction arbitraire de u ou de $x + ay$. Donc cette solution peut se représenter par

$$z = e^{by} \varphi(x + ay),$$

φ désignant une fonction arbitraire. On aura autant de solutions de cette forme, différentes entre elles, que l'on pourra trouver, pour s, de valeurs différentes de la forme $ar+b$. En ajoutant toutes ces solutions, on obtiendra une solution plus générale.

1087. Soit donnée, par exemple, l'équation du second ordre à coefficients constants

$$\mathrm{R}r+2\mathrm{S}s+\mathrm{T}t=0, \quad \text{ou} \quad \mathrm{R}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\mathrm{S}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\mathrm{T}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Si l'on pose

$$z=e^{x+ay},$$

il viendra

$$\mathrm{R}+2\mathrm{S}a+\mathrm{T}a^2=0,$$

d'où l'on tire pour a deux valeurs a_1, a_2. On en déduit l'intégrale générale

$$z=\varphi(x+a_1y)+\chi(x+a_2y),$$

φ et χ désignant deux fonctions arbitraires.

Si l'on considère, en particulier, l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

les racines a_1, a_2 seront ici $+a$ et $-a$, et l'intégrale générale sera

$$z=\varphi(x+ay)+\chi(x-ay),$$

comme nous l'avons déjà trouvé [1064, 1065]. On voit que cette intégrale est générale, parce qu'elle permet, pour $y=y_0$, de choisir arbitrairement les valeurs de z et de $\frac{\partial z}{\partial y}$ en fonction de x.

Plus généralement, étant donnée l'équation à coefficients constants

$$\mathrm{A}\frac{\partial^n z}{\partial x^n}+\mathrm{A}_1\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}+\ldots+\mathrm{A}_n\frac{\partial^n z}{\partial y^n}=0,$$

qui ne contient que des dérivées de même ordre, si l'on désigne par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les racines de l'équation algébrique

$$\mathrm{A}+\mathrm{A}_1a+\ldots+\mathrm{A}_na^n=0,$$

l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles sera

$$z = \varphi_1(x + a_1 y) + \varphi_2(x + a_2 y) + \ldots + \varphi_n(x + a_n y),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ désignant des fonctions arbitraires.

1088. II. On peut encore, pour généraliser les solutions, employer le procédé suivant. Ayant formé une solution particulière

$$z = C e^{rx+f(r)y},$$

où C et r sont entièrement indéterminés, représentons la constante arbitraire C par une fonction arbitraire de r, et supposons cette fonction infiniment petite et de la forme $\varphi(r)\,dr$, en sorte que la solution particulière deviendra

$$\varphi(r)\,dr.e^{rx+f(r)y}.$$

Faisons croître maintenant r par intervalles infiniment petits, égaux à dr, en lui donnant successivement les valeurs

$$r_0,\; r_0 + dr,\; r_0 + 2dr,\; \ldots,\; r_1,$$

ce qui donne autant de solutions différentes. En ajoutant toutes ces solutions et prenant la limite de leur somme, on aura une solution sous la forme d'une intégrale définie,

$$z = \int_{r_0}^{r_1} \varphi(r)\,dr.e^{rx+f(r)y},$$

renfermant une fonction arbitraire $\varphi(r)$. L'intégration, que l'on pourra effectuer quand la fonction $\varphi(r)$ sera donnée, déterminera pour z une valeur en fonction de x et de y. On fera la même chose pour chacune des ν déterminations (3) de la fonction $f(r)$. En ajoutant les solutions ainsi obtenues, on aura une solution plus générale, renfermant ν fonctions arbitraires.

1089. Si, au lieu d'une équation *sans second membre,* comme l'équation (1), on donne une équation dont le second membre soit fonction des variables indépendantes, il suffira, pour avoir l'intégrale générale de cette dernière équation, d'ajouter une intégrale particulière quelconque de cette même équation à l'intégrale générale de l'équation sans second membre [901].

Lorsque le second membre est une fonction d'une seule des variables indépendantes, la recherche de la solution particulière se ramènera à l'intégration d'une équation aux différentielles ordinaires, dans le cas où l'équation renferme un ou plusieurs termes où les dérivées soient prises par rapport à la seule variable du second membre et multipliées par des coefficients fonctions de cette seule variable; car il est clair que l'équation proposée sera vérifiée par une fonction de cette seule variable satisfaisant à l'équation différentielle en question.

Soit, par exemple, l'équation

$$R\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2S\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + T\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = V,$$

où $\frac{V}{R}$ est fonction de la seule variable x. L'équation sera vérifiée par une fonction z_1 de x seulement, déterminée par l'équation différentielle

$$R\frac{d^2 z_1}{dx^2} = V,$$

d'où l'on tire

$$z_1 = \int\int \frac{V}{R}\,dx^2.$$

En particulier, si $\frac{V}{R}$ est constant, on aura

$$z_1 = \frac{Vx^2}{2R}.$$

En ajoutant cette solution à la solution générale de l'équation sans second membre

$$R\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2S\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + T\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

on aura la solution générale de l'équation proposée.

EXERCICES.

I. — Équations aux différentielles totales.

1. $az\,dx + bz\,dy - (ax + by)\,dz = 0$.

2. $y\,dx - x\,dy + y(ayz^2 - ax - 2yz)\,dz = 0$.

3. $(x^2 + y^2)\,dz = (z - a)(x\,dx + y\,dy)$.

4. $(y + z)\,dx + dy + dz = 0$.

5. $(y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz = 0$.

6. $(x - 3y - z)\,dx + (2y - 3x)\,dy + (z - x)\,dz = 0$.

7. $ay^2z^2\,dx + bz^2x^2\,dy + cx^2y^2\,dz = 0$.

8. $y(y + z)\,dx + z(x + z)\,dy + y(y - x)\,dz = 0$.

9. $2(y + z)\,dx + (x + 3y + 2z)\,dy + (x + y)\,dz = 0$.

10. $(cy + bz)\,dx + (az + cx)\,dy + (bx + ay)\,dz = 0$.

11. $(y^2 + yz + z^2)\,dx + (z^2 + zx + x^2)\,dy + (x^2 + xy + y^2)\,dz = 0$.

12. $(x - a)\,dx - dy\sqrt{h^2 - z^2 - (x - a)^2} + z\,dz = 0$.

13. $(2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)\,dx + dy + 2z\,dz = 0$.

14. $(2xz + z^3)\,dx + 2yz\,dy - 2(x^2 + y^2 - k^2)\,dz = 0$.

15. $(x^2y - y^3 - y^2z)\,dx + (xy^2 - x^2z - x^3)\,dy + (xy^2 + x^2y)\,dz = 0$.

16. $(y + z)\log(y + z)\,dx - x\,dy - x\,dz = 0$.

17. $(1 + 2m)x\,dx + y(1 - x)\,dy + z\,dz = 0$.
[Représente un système de lignes tracées sur une sphère, et se projetant sur le plan des xy suivant des paraboles.]

18. $(y + a)^2\,dx + z\,dy - (y + a)\,dz = 0$.

19. $(2xz + z^3)\,dx + 2yz\,dy - 2(x^2 + y^2 + a^2)\,dz = 0$.

20. $y(1 + z)\,dx + x(1 + z)\,dy + (xy - 2az)\,dz = 0$.

21. $z\,dx - x\,dy + (xz + x\log x)\,dz = 0$.

22. $$(2y^2 + 4ax^2z^2)x\,dx + \left(\frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}} + 3y + 2x^2\right)y\,dy + \left(2ax^2 + 4z^2 + \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}}\right)z\,dz = 0.$$

23. $(y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz = 0.$

24. $(x^2+y^2)z\,dx + (x^2+z^2)z\,dy - 2(x+y)xy\,dz = 0.$

25. Conditions d'intégrabilité de l'équation

$$dz = (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)\,dx + (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta')\,dy.$$

26. $y(y+z)\,dw + z(y+z)\,dx + z(w-x)\,dy + y(x-w)\,dz = 0.$

27. $2\,dx + x\,dy - dz = 0.$

Déterminer la fonction arbitraire de manière à obtenir la solution de Newton

$$y = \sqrt{x}, \quad z = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x,$$

ou

$$x = y^2, \quad z = 2x + \frac{1}{3}y^3.$$

28. $dz = xy\,(x\,dx + y\,dy).$

29. $z\,dx + x\,dy + y\,dz = 0.$

30. $x\,dx + y\,dy + c\,dz\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} = 0.$

Déterminer la fonction arbitraire de manière que les courbes représentées par l'équation soient situées sur l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

31. $(z-y)\,dx + x\,dy + (y-z)\,dz = 0.$

32. $y^2\,dx + x^2\,dy + dz = 0.$

33. $y\,dx - x\,dy + 2z\,dz = 0.$

34. $(ay - bz)\,dx + (cz - ax)\,dy + (bx - cy)\,dz = 0.$

35. $dz = ay\,dx + b\,dy.$

II. — Équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre.

1. $p + q = \frac{z}{a}.$

2. $xp - yq = 0.$

3. $xp + zq + y = 0.$

4. $(x - mz)p + (y - nz)q = 0.$

5. $xp + yq = nz.$

6. $\dfrac{p}{x} + \dfrac{q}{y} = \dfrac{1}{z}$.

7. $x^2 p + y^2 q = z^2$.

8. $xzp + yzq = xy$.

9. $x^2 p - xyq = -y^2$.

10. $x^2 p + y^2 q = x^2 y^2 z^2$.

11. $x^2 p + x^2 zq = xz + 3y$.

12. $z - px - qy = a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

13. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = xyz$.

14. $\dfrac{y^2 z}{x} p + xzq = y^2$.

15. $yz^2 p + (a^2 x - y) q = 0$.

16. $(x + y) p + (y - x) q = 0$.

17. $z(p + q) + (y - x)(p - q) = x + y + z$.

18. $yp + yzq = xz^2$.

19. $p + f(x, y) q + f_1(x, y) = 0$,
ou $dz + f_1(x, y) dx + q[f(x, y) dx - dy] = 0$.

Si de $f(x, y) dx - dy = 0$ on tire $C = \varphi(x, y)$, on a

$$z = -\int f_1(x, y) dx + \chi(C) = -\int f(x, y) dx + \chi(\varphi).$$

Exemples : $xp - yq = \dfrac{x^2}{y}$,

$$xyp - y^2 q + x(1 + x^2) = 0.$$

20. $xyq = -nz$.

21. $(x^2 + y^2) p = y^2 + z^2$.

22. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = au + \dfrac{xy}{z}$.

23. $xp + zq + y = 0$.

24. $\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2\dfrac{\partial u}{\partial y} + 3\dfrac{\partial u}{\partial z} = 4$.

25. $azp + bzq = bz - ay + cz.$

[Examiner le cas où $c = 0$].

26. $(mz - ny)p + (nx - lz)q = ly - mx.$

27. $[y - b - n(z - c)]p - [x - a - m(z - c)]q = n(x - a) - m(y - b).$

28. $(ax + by)p + (a'x + b'y)q = cz.$

29. Intégrer l'équation aux dérivées partielles qui donne le facteur d'intégration de l'équation différentielle

$$(x^3y - 2y^4)\,dx + (xy^3 - 2x^4)\,dy = 0.$$

30. Équation aux dérivées partielles des trajectoires orthogonales d'une série de surfaces représentées par l'équation $F(x, y, z, C) = 0$.

Exemple : $2Cx = x^2 + y^2 + z^2$. Déterminer la fonction arbitraire de manière que les trajectoires soient des sphères.

31. $(y - z)\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x} - u\right) + yz\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) + x\left(z\dfrac{\partial u}{\partial z} - y\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$

III. — Équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre.

1. $pq = 1.$

2. $p^2 + q^2 = 1.$

3. $q = e^{-\frac{p}{a}}.$

4. $x^2p^2 = yq^2.$

5. $q = p^n XYZ.$

6. $z - px - qy = c\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$

7. $pq = px + qy.$

8. $q = px + p^2.$

9. $z = px + qy + pq.$

10. $\sqrt{p} + \sqrt{q} = 2x.$

11. $xq = yp + xe^{x^2+y^2}.$

12. $q = (z + px)^2.$

IV. — Équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur au premier.

1. $s = a$.

2. $xy - s = 0$.

3. $s = ax + by$.

4. $x + y + z - s^2 = 0$.

5. $ar = xy$.

6. $xyr = (n-1)yp + a$.

7. $xr = (n-1)p$.

8. $r + \varphi(x, y)p = \chi(x, y)$.

9. $s + \varphi(x, y)p = \chi(x, y)$.

10. $r + \dfrac{p}{x} = 9xy^2$.

11. $s + \dfrac{2p}{y} = \dfrac{1}{y^2}$.

12. $r - a^2 t = xy$.

13. $r + 3s + 2t = x + y$. [Poser $z = \mathrm{A}x^m y^n + \mathrm{B}x^\mu y^\nu$].

14. $r + (a+b)s + abt = xy$.

15. $r + \varphi(x, y)s = \chi(x, y)$.

16. $r + \dfrac{y}{x}s = 15xy^2$.

17. $ar + a_1 s + a_2 t + a_3 p + a_4 q + a_5 z = 0$.

18. $s + \dfrac{y}{1 - y^2}p = ay^3$.

LIVRE SIXIÈME.

THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE. APPLICATIONS A LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE DES FONCTIONS UNIFORMES.

§ I.

CARACTÈRES DES FONCTIONS SYNECTIQUES D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

1090. Supposons que la quantité complexe $r_p = z$ varie, c'est-à-dire, en langage géométrique, que le point z se déplace dans le plan. Lorsque ce point passe de la position z à la position z_1, la différence $z_1 - z$ représente, en grandeur et en direction, la distance de ces deux positions.

A une valeur infiniment petite de l'accroissement $z_1 - z$ correspondront des valeurs infiniment petites [71] des accroissements du module r et de l'argument p, ainsi que des composantes rectangulaires x, y. Ces diverses grandeurs varieront donc d'une manière continue, lorsque le point z subira un déplacement continu dans le plan.

Nous appellerons l'accroissement infiniment petit $z_1 - z$ la *différentielle* de la variable z, et nous le représenterons par dz.

Toutes les règles de la différentiation des quantités réelles, qui ne dépendent que des règles de l'addition et de la soustraction,

subsisteront encore pour les quantités complexes, où i joue le rôle d'une constante. On aura ainsi

$$dz = d(x + iy) = dx + i\,dy = d.re^{ip} = re^{ip}\left(\frac{dr}{r} + i\,dp\right).$$

Le module de la quantité complexe dz a pour valeur infiniment petite

$$\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 dp^2}.$$

Son argument

$$\varphi = \text{arc tang}\,\frac{dy}{dx}$$

a une valeur quelconque, dépendante de la direction suivant laquelle se déplace le point z.

Si le point z décrit une courbe continue, ρ sera l'élément d'arc de cette courbe [611] et φ l'angle de la tangente avec l'axe des x.

1091. Le chemin décrit par z, dans le cas où l'angle φ varie d'une manière continue, est la limite d'un polygone infinitésimal qui a pour côtés les accroissements dz successifs. La distance des deux positions extrêmes de z est égale à la limite de la somme, *en grandeur et en direction,* des côtés de ce polygone. Nous représenterons par le signe d'intégration cette limite de somme d'éléments infiniment petits.

D'après cela, la droite qui joint les deux positions extrêmes z_0 et Z du point mobile aura pour expression

$$Z - z_0 = \int_{z_0}^{Z} dz.$$

Cette valeur est indépendante de la forme du chemin suivi par le point z pour aller de z_0 à Z.

1092. Imaginons maintenant qu'en chaque point du plan, correspondant à une valeur de la variable complexe z, on place une valeur complexe w, variant d'un point z à l'autre, suivant une loi déterminée. L'ensemble de ces valeurs w, dont le plan est ainsi chargé, constitue ce qu'on appelle, dans le sens le plus général du mot, une *fonction* de la variable complexe z.

Si à un accroissement infiniment petit quelconque dz de z [173]

correspond toujours un accroissement infiniment petit dw de la fonction w, cette fonction sera dite *continue*.

Si chaque point z ne porte qu'une seule valeur de la fonction w, cette fonction sera dite *uniforme*. Si chaque point z porte plusieurs valeurs de w, cette fonction sera dite *multiforme*.

Les fonctions *analytiques* [156], définies pour les quantités réelles, puis étendues, conformément au principe de la permanence des règles du calcul [8], aux quantités complexes, sont des fonctions les unes uniformes, les autres multiformes.

1093. La valeur d'une fonction analytique de z dépend uniquement de la position du point z sur le plan, et non du système de coordonnées employé pour fixer cette position. Elle ne changera pas, soit que l'on mette la quantité complexe z sous la forme re^{ip}, soit qu'on la mette sous la forme $x+iy$, lors même que les symboles x et y représenteraient eux-mêmes des quantités complexes, pourvu que $x+iy$ fût identiquement égal à $r(\cos p + i \sin p)$. Le passage de l'un des modes de représentation à l'autre correspondrait à une simple transformation algébrique, qui se ferait suivant les règles établies.

Soit

$$w = \mathrm{F}(x, y)$$

ce que devient l'expression de la fonction analytique w, lorsqu'on y remplace z par $x+iy$, x et y étant des variables indépendantes, réelles ou complexes. Cette fonction devra rester constante toutes les fois que $z = x+iy$ restera constant. Si donc on élimine $x = z - iy$, il faudra que $\mathrm{F}(z-iy, y)$ reste constante en même temps que z, quel que soit y; donc cette fonction devra être indépendante de y, et sa dérivée partielle par rapport à y,

$$-i\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y},$$

devra s'annuler identiquement, dès qu'on y remplacera x par $z - iy$, c'est-à-dire par une valeur quelconque. Donc toute fonction $w = \mathrm{F}(x, y)$, provenant d'une opération analytique exécutée sur le binôme $x+iy$, devra satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

1094. On peut encore établir cette condition comme il suit. Supposons que $F(x, y)$ soit une fonction $\varphi(z) = \varphi(x+iy)$ de la variable complexe $z = x + iy$. Les variables x et y étant supposées indépendantes, on aura, en ne faisant varier qu'une seule d'entre elles à la fois,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(z),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial y} = i\varphi'(z),$$

d'où, en éliminant $\varphi'(z)$, on tire la condition *nécessaire*

$$\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Réciproquement, si cette condition est identiquement vérifiée, on aura

$$d_x F = \frac{\partial F}{\partial x}dx, \quad d_y F = \frac{\partial F}{\partial y}dy = i\frac{\partial F}{\partial x}dy,$$

d'où l'on conclut, pour la valeur de la différentielle totale de la fonction F,

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(dx + i\,dy) = -i\frac{\partial F}{\partial y}(dx + i\,dy).$$

Or, $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ ne pouvant être l'une et l'autre identiquement nulles, si F ne se réduit pas à une constante, la condition nécessaire et suffisante pour que $dF(x, y)$ reste nulle, ou pour que $F(x, y)$ ne varie pas, c'est que $x + iy$ ne varie pas. $F(x, y)$, étant donc constante ou variable suivant que $x + iy$ sera constante ou variable, ne dépendra que de $x + iy$, et sera par suite de la forme $\varphi(x + iy)$.

On peut enfin remarquer que l'équation aux dérivées partielles (1) est un cas particulier de celle dont nous avons traité au n° 1062, et dans laquelle il suffit de faire $a = i$ pour en conclure

$$w = \varphi(x + iy).$$

Ainsi l'équation (1) exprime que la fonction w dépend, non de x ou de y isolément, mais de la combinaison $x + iy$ de ces deux variables.

1093. L'équation (1) exprime en même temps la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $w = F(x, y)$ jouisse de la propriété fondamentale d'*avoir une dérivée par rapport à la variable* $z = x + iy$, c'est-à-dire pour que le rapport $\frac{dF(x,y)}{d(x+iy)}$ tende vers une limite déterminée, indépendamment du rapport des accroissements dx, dy, c'est-à-dire indépendamment de l'argument de dz [1090].

En effet, en réduisant les différentielles à leurs parties principales, et remplaçant $\frac{\partial F}{\partial x}$ par sa valeur $\frac{1}{i}\frac{\partial F}{\partial y}$, tirée de la condition (1), il vient

$$\frac{dF(x,y)}{d(x+iy)} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy}{dx + i\,dy} = \frac{\frac{1}{i}\frac{\partial F}{\partial y}(dx + i\,dy)}{dx + i\,dy} = \frac{1}{i}\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Donc le rapport

$$\frac{dF(x,y)}{d(x+iy)} \quad \text{ou} \quad \frac{dw}{dz}$$

tend vers la limite déterminée

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y},$$

toutes les fois que w satisfait à la condition (1).

Réciproquement, pour que $\frac{dw}{dz}$ ait une limite déterminée, il faut que le rapport

$$\frac{dF(x,y)}{d(x+iy)} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}}{1 + i\frac{dy}{dx}}$$

soit indépendant de $\frac{dy}{dx}$, ce qui exige que l'on ait

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} = 1 : i,$$

c'est-à-dire la condition (1).

C'est grâce à cette propriété qu'il est permis d'appliquer aux fonctions analytiques de variables complexes les règles de la dif-

férentiation et de l'intégration indéfinie, établies pour les fonctions de variables réelles.

1096. Cette propriété n'appartient pas à toute espèce de quantité variable continue qui serait déterminée d'une manière quelconque par la position du point z. Par exemple, z étant connu, on connaît ses composantes rectangulaires, c'est-à-dire les variables réelles x, y. D'après ce mode de détermination, toute fonction $F(x, y)$ des deux variables indépendantes réelles x, y aurait toutes ses valeurs définies par les valeurs correspondantes de z, et pourrait, à ce point de vue, être considérée comme une fonction de z.

Mais il faut observer que, dans cette détermination, on emploie une opération qui ne peut avoir son analogue dans le calcul des fonctions de variables réelles, savoir, la *décomposition* de la quantité complexe z en ses deux *composantes*, l'une réelle, l'autre imaginaire pure, et le partage, qui s'ensuit, d'une équation en deux autres. On n'est donc pas en droit d'appliquer à une telle fonction les règles établies pour les fonctions de quantités réelles. Le calcul de telles fonctions exigerait des règles spéciales, qui ne comprendraient pas comme cas particuliers les règles relatives aux fonctions de variables réelles, et qui présenteraient à l'égard de celles-ci des différences analogues aux différences que présentent les règles de l'analyse des nombres entiers dans la Théorie des nombres. Dès lors, sans parler des complications qu'elle pourrait offrir, l'analyse des quantités complexes n'atteindrait plus son but principal, d'éclairer, en la généralisant, l'analyse des quantités réelles.

On voit déjà, par ce qui a été dit au numéro précédent, qu'une fonction $F(x, y)$, qui ne satisfait pas à la condition (1), ne peut être traitée comme une fonction de la seule variable z, lorsqu'il s'agit de lui appliquer les règles du Calcul différentiel.

Par exemple, les fonctions

$$x,\quad y,\quad x - iy,\quad x^2 + y^2,$$

sont bien déterminées pour chaque point z; mais, en faisant

$$z = re^{ip},\quad dz = \rho e^{i\varphi},$$

on trouvera, pour les limites de $\frac{dw}{dz}$ relatives à ces fonctions, les

expressions

$$\frac{\rho\cos\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}\cos\varphi, \qquad \frac{\rho\sin\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}\sin\varphi,$$

$$\frac{\rho e^{-i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} = e^{-2i\varphi}, \qquad \frac{2x\,dx + 2y\,dy}{\rho e^{i\varphi}} = 2r\cos(p - \varphi)e^{-i\varphi},$$

qui dépendent toutes de l'argument φ de dz.

1097. Une fonction qui satisfait à l'équation (1) et qui, par suite, jouit de la propriété d'avoir une dérivée indépendante de la direction suivant laquelle on a donné à z l'accroissement infiniment petit dz, est dite une fonction *monogène* de z.

L'existence d'une dérivée supposant nécessairement la continuité de la fonction primitive, toute fonction monogène sera aussi continue, sauf pour certaines valeurs singulières de la variable.

Les fonctions monogènes satisfaisant seules à la loi de la permanence des règles du calcul et pouvant seules, par conséquent, être employées pour la généralisation des calculs relatifs aux fonctions d'une variable réelle, ce seront les seules que nous considérerons dans tout ce qui va suivre. Nous pourrons, à cause de cela, nous dispenser de répéter chaque fois le mot *monogène*, et, quand nous parlerons d'une *fonction de la variable complexe z*, il sera bien entendu que c'est d'une fonction *monogène* qu'il s'agira.

Une fonction continue qui est à la fois *uniforme* et *monogène* s'appelle une fonction *synectique*.

1098. Supposons la fonction w décomposée en ses composantes rectangulaires, de sorte que l'on ait, u et v étant réels,

$$w = u + iv.$$

L'équation (1) deviendra alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0,$$

et se partagera ainsi dans les deux suivantes :

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Ces dernières équations expriment les relations auxquelles doivent satisfaire deux fonctions réelles u, v des variables indépendantes x, y, pour qu'on puisse les considérer comme les composantes rectangulaires d'une fonction monogène du binôme $x+iy$.

1099. Si l'on différentie les équations (2) successivement par rapport à x et à y, on en tire, par addition et soustraction,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

ce qui montre que chacune des fonctions u, v, de même aussi que la fonction $w=u+iv$, est assujettie à satisfaire à l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}=0.$$

Nous avons vu [1044] que l'intégrale générale de cette équation est

$$\omega=\varphi(x+iy)+\chi(x-iy),$$

fonction qui est la somme de deux fonctions monogènes, mais qui n'est elle-même monogène que lorsqu'une des deux fonctions φ ou χ s'annule.

1100. Si, au lieu de mettre la variable z sous la forme $x+iy$, on l'emploie sous la forme re^{ip}, on obtiendra, par des calculs analogues aux précédents, la condition pour qu'une fonction $w=\Pi(r,p)$ des variables indépendantes r, p ne dépende que de la combinaison re^{ip} de ces variables. En substituant à r sa valeur ze^{-ip}, il vient

$$w=\Pi(ze^{-ip},p),$$

qui ne doit plus dépendre de p. Si l'on égale à zéro la dérivée de cette expression par rapport à p, on obtiendra, pour la condition de *monogénéité* de cette fonction,

$$(1)^* \qquad r\frac{\partial w}{\partial r}+i\frac{\partial w}{\partial p}=0.$$

On serait arrivé au même résultat soit en éliminant par différen-

tiation la fonction φ de la relation $w = \varphi(re^{pi})$, soit en opérant dans l'équation (1) un changement de variables, soit enfin en cherchant directement la condition pour que le rapport

$$\frac{dw}{d(re^{pi})}$$

tende vers une limite déterminée, indépendante de la *direction* de dz.

Si l'on met la fonction w sous la forme $\mathrm{R}e^{i\mathrm{P}}$, R et P étant réels, l'équation (1)* se partagera dans les deux suivantes :

$$r\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r} - \mathrm{R}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p} + r\mathrm{R}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial r} = 0.$$

1101. En supposant les conditions (2) remplies, posons

(3) $$\mathrm{X} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \mathrm{Y} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

d'où

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \mathrm{X} + i\mathrm{Y}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = i(\mathrm{X} + i\mathrm{Y}),$$

et par suite

$$dw = (\mathrm{X} + i\mathrm{Y})(dx + i\,dy) = (\mathrm{X} + i\mathrm{Y})\,dz.$$

Donc la dérivée totale de w par rapport à z a pour expression

(4) $$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y} = \mathrm{X} + i\mathrm{Y}.$$

1102. La dérivée $\frac{dw}{dz}$, donnée par la formule (4), est, aussi bien que w, une fonction monogène de z. On a, en effet, d'après les équations (3),

$$\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x},$$

ce qui donne pour la fonction $\mathrm{X} + i\mathrm{Y}$ l'analogue des conditions (2).

Il en est de même, d'après les équations (4), pour les dérivées partielles $\frac{\partial w}{\partial x}$ et $\frac{\partial w}{\partial y}$.

Donc, si w est une fonction monogène de $z = x + iy$, toutes ses dérivées des divers ordres, soit totales, soit partielles, seront aussi des fonctions monogènes de z.

1103. Supposons que la variable z soit elle-même une fonction monogène d'une autre variable $\zeta = \xi + i\eta$, de sorte que l'on ait

$$z = \varphi(\zeta) = \varphi(\xi + i\eta).$$

Toute fonction monogène de z sera aussi une fonction monogène de ζ.

On a, en effet, en supposant $w = f(z)$,

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial \eta},$$

d'où, en vertu de l'équation (1) appliquée à la fonction $z = \varphi(\zeta)$,

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} + i\frac{\partial w}{\partial \eta} = f'(z)\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + i\frac{\partial z}{\partial \eta}\right) = 0;$$

donc w, considéré comme fonction de ξ et de η, est une fonction monogène de $\xi + i\eta$.

Autrement, on a, quel que soit dz,

$$dw = f'(z)\,dz,$$

et de même, quel que soit $d\zeta$,

$$dz = \varphi'(\zeta)\,d\zeta.$$

Donc

$$\frac{dw}{d\zeta} = f'(z)\,\varphi'(\zeta)$$

est une quantité indépendante de $d\zeta$; donc w est une fonction monogène de la variable ζ.

1104. La condition de monogénéité, exprimée par l'équation

$$dw = (X + iY)\,dz,$$

correspond à une relation géométrique remarquable entre les points du plan qui représentent les valeurs de la variable z et ceux

qui représentent les valeurs de la fonction w. Si l'on représente les différentielles de z et de w par

$$dz = \rho e^{i\varphi}, \quad dw = \sigma e^{i\chi},$$

la formule précédente donne

$$\frac{\sigma}{\rho} e^{i(\chi-\varphi)} = X + iY,$$

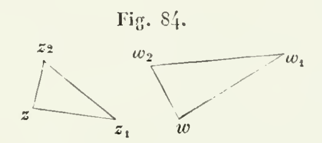
d'où, en égalant de part et d'autre les modules et les arguments,

$$\frac{\sigma}{\rho} = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \chi - \varphi = \text{arc tang}\frac{+Y}{+X}.$$

On voit par là que, dz et dw étant deux accroissements infiniment petits simultanés de la variable z et de la fonction w, le rapport $\frac{\sigma}{\rho}$ de leurs modules et la différence $\chi - \varphi$ de leurs arguments ne dépendent pas de φ ou de dz, mais seulement de la position du point z lui-même.

Donc, si $\overline{zz_1}$, $\overline{zz_2}$ (*fig.* 84) sont deux accroissements infiniment petits de z, et $\overline{ww_1}$, $\overline{ww_2}$ les accroissements correspondants de w,

Fig. 84.



les deux triangles zz_1z_2 et ww_1w_2 seront toujours *directement semblables*.

Si donc on donne sur un plan un système de points (x, y), et que l'on représente ce système par les points (u, v) d'un autre plan, en établissant entre les coordonnées des points correspondants des deux systèmes une relation arbitraire de la forme

$$u + iv = \varphi(x + iy),$$

les figures formées par ces deux systèmes de points correspondants seront *semblables dans leurs éléments infiniment petits*.

1105. Une fonction d'un nombre quelconque de variables

$f(x, y, \ldots)$ est dite *continue* dans le voisinage du système de valeurs $x, y, \ldots$, lorsque, pour des accroissements infiniment petits donnés à ces variables à partir de ce système de valeurs, l'accroissement de la fonction,

$$f(x + dx, y + dy, \ldots) - f(x, y, \ldots),$$

est lui-même infiniment petit, quels que soient les rapports des accroissements $dx, dy, \ldots$. Dans le cas contraire, la fonction est *discontinue* dans le voisinage du *point* $(x, y, \ldots)$.

Une fonction $f(z)$ d'une variable complexe $z = x + iy$, étant un cas particulier d'une fonction de deux variables réelles, sera continue dans le voisinage du point z, lorsque la différence $df(z) = f(z + dz) - f(z)$ sera infiniment petite en même temps que dx et dy, c'est-à-dire en même temps que le module de dz, ou que dz lui-même.

La fonction $f(z)$ sera dite continue dans une portion de plan ou dans une *aire* donnée, lorsqu'elle sera continue dans le voisinage de tout point z situé à l'intérieur de cette aire.

Pour les points du *contour* qui limite l'aire, il pourra arriver que la fonction cesse d'être continue relativement aux points situés en dehors du contour ou sur le contour lui-même. On devra donc indiquer, dans chaque cas particulier, si le contour est ou non compris dans la région de continuité.

D'après cela, $f(z)$ variera d'une manière continue entre deux limites données z_0, Z, lorsque, z passant de la position z_0 à la position Z par un chemin de forme quelconque, pourvu qu'il ne présente aucune interruption, les valeurs de $f(z)$ correspondantes à deux positions infiniment voisines sur le chemin donné diffèrent entre elles infiniment peu.

Remarquons que, généralement, il ne faut considérer comme infiniment voisins, sur la courbe décrite par z, que les points tels que z passe de l'un à l'autre en parcourant un arc de cette courbe infiniment petit; de sorte que, dans le voisinage du point de croisement de deux branches de cette courbe, deux points, si petite que soit leur distance rectiligne, ne devront pas, dans certaines circonstances, être regardés comme infiniment voisins, s'ils appartiennent à des branches différentes.

Si la courbe qui va de z_0 à Z est située tout entière à l'intérieur

de l'*aire de continuité* de la fonction $f(z)$, cette fonction sera nécessairement continue tout le long de cette courbe.

1106. Une fonction peut devenir discontinue de plusieurs manières, soit en passant brusquement d'une valeur finie à une valeur finie différente, comme cela a lieu pour l'ordonnée d'une courbe présentant un point de rupture; soit en devenant infinie pour certaines valeurs de la variable, comme les fonctions

$$\frac{1}{z-c}, \quad \tang\frac{\pi z}{2c}, \quad e^{\frac{1}{z-c}},$$

pour $z=c$.

Un point $z=c$ pour lequel la fonction $f(z)$ devient infinie s'appelle, pour abréger, un *infini* de cette fonction.

De même, un point pour lequel la fonction $f(z)$ s'annule est dit un *zéro* de cette fonction.

1107. Une fonction peut présenter des infinis de diverses natures, que l'on distinguera par la considération des valeurs correspondantes de l'inverse $\frac{1}{f(z)}$ de cette fonction.

Pour les fonctions $\frac{1}{z-c}$, $\tang\frac{\pi z}{2c}$, par exemple, qui ont toutes les deux pour infini le point c, les valeurs inverses $z-c$ et $\cot\frac{\pi z}{2c}$ s'annulent l'une et l'autre en ce point, et, de plus, elles sont continues dans son voisinage. La fonction $e^{\frac{1}{z-c}}$, au contraire, est infinie lorsque $z-c$ tend vers zéro par une suite de valeurs positives; mais elle est nulle quand on fait tendre $z-c$ vers zéro par des valeurs négatives; et la même chose a lieu, seulement dans un ordre différent, pour la valeur $e^{-\frac{1}{z-c}}$ de l'inverse de la même fonction. Dans ce dernier cas, on voit donc que l'inverse de la fonction est discontinu aussi bien que la fonction elle-même.

Nous donnerons le nom d'*infini* proprement dit ou de point de discontinuité de *première espèce* (¹) d'une fonction $f(z)$ à toute

(¹) M. C. Neumann a proposé la dénomination de *pôle* pour désigner ces valeurs. Il nous a semblé que ce mot est déjà employé en Mathématiques dans trop de sens différents pour qu'il soit convenable de lui attribuer encore une nouvelle acception.

valeur c pour laquelle, à une valeur infiniment petite et *d'argument quelconque* de la différence $z - c$, correspond une valeur infiniment grande de $f(z)$, et une valeur infiniment petite et continue de l'expression inverse $\frac{1}{f(z)}$.

Nous réservons le nom de *points de discontinuité* proprement dite ou de *seconde espèce* aux valeurs pour lesquelles $\frac{1}{f(z)}$ devient discontinu en même temps que $f(z)$, c'est-à-dire pour lesquelles $f(z)$ et $\frac{1}{f(z)}$ passent brusquement l'un et l'autre d'une valeur finie à une valeur différente, soit finie, soit infinie.

On voit que, si une fonction $f(z)$ n'admet que des *infinis* proprement dits ou *discontinuités de première espèce*, tout *infini* de $f(z)$ sera un *zéro* de son inverse $\frac{1}{f(z)}$, et, *vice versa*, tout zéro de $f(z)$ sera un infini de $\frac{1}{f(z)}$.

1108. Nous avons appelé *uniforme* une fonction qui n'admet pour chaque valeur de la variable, qu'une seule valeur déterminée.

Telles sont les fonctions qui résultent des opérations *rationnelles* de l'Algèbre : addition et soustraction, multiplication, division, élévation aux puissances entières. Telles sont encore les fonctions définies comme limites de sommes de séries absolument convergentes : par exemple, les fonctions exponentielles et circulaires. Tels sont enfin les résultats des diverses combinaisons d'un nombre fini de ces opérations entre elles.

En particulier, si $f(z)$ est une fonction uniforme, son inverse $\frac{1}{f(z)}$ sera aussi une fonction uniforme.

1109. Si l'une des fonctions $f(z)$, $\frac{1}{f(z)}$ a un infini proprement dit au point c, l'autre fonction, étant continue dans le voisinage du même point (qui est pour elle un zéro), sera encore uniforme en ce point, si elle l'est pour tous les points infiniment voisins. Nous dirons alors que celle des deux fonctions qui devient infinie, et qui est uniforme dans le voisinage de son infini, est encore uniforme pour cet infini même.

Si, au contraire, la fonction $f(z)$ a en c une discontinuité de seconde espèce, auquel cas il en est de même pour la fonction $\frac{1}{f(z)}$, alors $f(z)$ et $\frac{1}{f(z)}$ ne seront pas uniformes au point c, quoiqu'elles puissent être uniformes en tout autre point.

1110. Si deux variables, w et z, sont liées entre elles de telle manière que, pour chaque valeur de z, w prenne une valeur déterminée, mais ne prenne jamais la même valeur pour deux valeurs de z différentes entre elles, alors z pourra être considéré comme une fonction uniforme de w. C'est ce qui a lieu pour les deux fonctions

$$w = az + b, \quad w = \frac{az + b}{cz + d},$$

z étant, dans les deux cas, une fonction uniforme de w, aussi bien que w est une fonction uniforme de z.

Mais généralement il n'en est point ainsi. Une fonction w de z reprend la même valeur en différents points du plan, qui peuvent être en nombre fini ou infini. Il en résulte alors que, si l'on considère réciproquement z comme une fonction de w, la valeur en question de w correspondra à plusieurs valeurs différentes de z, et que z sera, par suite, une fonction *multiforme* de w.

Ainsi nous avons vu que la fonction $w = z^n$, n étant entier, prend des valeurs égales en n points distribués régulièrement sur un même cercle. Si donc on cherche à déterminer z par la condition que w prenne une valeur donnée w_0, on trouvera pour solutions n points différents. On dira alors que $z = \sqrt[n]{w}$ est une fonction de w *à n déterminations*, ou une fonction *n-forme* de w.

Si deux variables w et z sont liées entre elles par une équation algébrique du degré m par rapport à w et du degré n par rapport à z, w sera une fonction m-forme de z, et z une fonction n-forme de w.

La fonction exponentielle $w = e^z$ ne change pas lorsqu'on y augmente z d'un multiple quelconque de $2\pi i$. Donc la fonction inverse $z = \log w$, définie par l'équation précédente, sera une fonction *infinitiforme* de w, admettant, pour chaque valeur de w, toutes les valeurs de z, en nombre infini, comprises dans la formule $z + 2k\pi i$, quel que soit l'entier k.

Remarquons, en général, que, si la fonction $w = f(z)$ est périodique, la fonction inverse $z = \varphi(w)$ admettra une infinité de valeurs, différant entre elles de multiples quelconques de l'indice de périodicité.

§ II.

REPRÉSENTATION D'UNE VARIABLE COMPLEXE SUR LA SPHÈRE ET SUR LE PLAN ANTIPODE.

1111. Considérons une sphère de diamètre égal à l'unité, tangente en l'origine O au plan des coordonnées x, y, ou *plan horizontal,* et située *au-dessous* de ce plan, par rapport à un observateur situé *au-dessus* du plan, c'est-à-dire voyant les mouvements de rotation *directs* s'effectuer dans ce plan en passant de sa droite vers sa gauche. Soit O′ le pôle *inférieur* de la sphère, opposé au pôle *supérieur* O.

Étant donné un point $z = r_p$ du plan horizontal, si nous le joignons au point O′ par une droite O′z, qui rencontre la sphère au point ζ et fasse avec O′O un angle υ, mesuré par la longueur de l'arc Oζ, on aura

$$\operatorname{tang}\upsilon = r,$$

et le point z aussi bien que le point ζ pourront être considérés comme des représentations de la même expression

$$re^{ip} = \operatorname{tang}\upsilon . e^{ip}.$$

Il est aisé de voir, en effet, que chacun des deux points z, ζ est complétement déterminé quand l'autre est donné.

Si l'un de ces points se déplace d'une manière continue, l'autre se déplacera aussi d'une manière continue. A un contour tracé sur l'une des deux surfaces, le plan ou la sphère, correspondra un contour de même nature tracé sur l'autre; les deux contours seront à la fois ouverts ou fermés, simples ou multiples.

Si le point z s'éloigne à l'infini, $\operatorname{tang}\upsilon$ croissant indéfiniment, υ tendra vers $\frac{\pi}{2}$, et le point ζ s'approchera du pôle O′, lequel correspondra par conséquent à la valeur $z = \infty$. Donc, à l'aide de la sphère, on peut représenter par un point déterminé, non-seulement

chaque valeur finie de z, mais encore la valeur $z = \infty$, à laquelle correspond le point unique et déterminé O′.

D'après cela, un contour qui, sur le plan horizontal des z, aurait deux branches infinies, comme une parabole, sera remplacé, sur la sphère, par un contour fermé, passant par le pôle O′. De même, à une hyperbole tracée sur le plan des z correspondra sur la sphère un contour de forme analogue à celle d'un 8, ayant son point multiple en O′.

1112. Nous avons dit tout à l'heure qu'à un déplacement infiniment petit de l'un quelconque des points z, ζ correspond généralement un déplacement infiniment petit de l'autre, de sorte qu'une fonction continue de l'une des variables z, ζ est aussi une fonction continue de l'autre. Mais il peut y avoir exception pour le *point de l'infini* O′.

En effet, sur le plan des z, les valeurs de z de module infiniment grand et d'arguments différents vont en divergeant de plus en plus, tandis que les points correspondants de la sphère vont en convergeant vers le même point O′, indépendamment des valeurs des arguments. A ces valeurs divergentes de z peuvent correspondre des limites différentes pour la valeur d'une fonction donnée de z. Il peut donc se faire qu'une fonction uniforme et continue pour tous les points de la sphère autres que O′ devienne multiforme et discontinue en ce point, où se réunissent des valeurs de la fonction différant entre elles de quantités finies ou infinies.

Par exemple, la fonction

$$\frac{az^2 + bz + c}{a'z^2 + b'z + c'},$$

qui, pour $z = \infty$, tend vers la limite finie et déterminée $\frac{a}{a'}$, quel que soit l'argument de z, sera encore uniforme et continue en O′, par rapport à la variable ζ.

Au contraire, la fonction [367]

$$\sin z = \sin x \operatorname{Ch} y + i \cos x \operatorname{Sh} y$$

ne tend pas vers une limite déterminée pour $z = \infty$; car, pour $x = 0$, ou $p = \frac{\pi}{2}$, elle devient $i \times \infty$; pour $y = 0$, ou $p = 0$, elle

devient $\sin\infty$, quantité indéterminée et susceptible de toutes les valeurs comprises entre -1 et $+1$. Donc en O′ la fonction $\sin z$ n'est plus uniforme et continue comme en tous les autres points de la sphère. Elle a en ce point une discontinuité de seconde espèce [1107].

1113. On peut concevoir le passage de la représentation sur le plan à la représentation sur la sphère comme résultant d'une déformation continue du plan, qui consisterait en ce que chaque point z du plan se transporterait sur la sphère sans changer d'azimut, en suivant la droite $O'z$. Par un semblable mouvement de tous ses points, la droite Oz viendrait, en se raccourcissant, s'appliquer sur l'arc de grand cercle $O\zeta$. Dans ce mouvement, un observateur placé en z, debout *au-dessus* du plan horizontal, viendrait, en accompagnant le point z, se placer au point ζ, sur le prolongement du rayon de la sphère.

On voit aisément comment le point ζ se changerait en z par la transformation inverse, qui consisterait à appliquer, en le dilatant, l'arc $O\zeta$ sur sa tangente Oz, l'extrémité ζ suivant la droite $O'\zeta$.

1114. Si maintenant, au lieu d'appliquer $O\zeta$ sur sa tangente en O, on applique de la même manière l'arc $O'\zeta$ sur sa tangente en O′, en faisant suivre à l'extrémité ζ la droite $O\zeta$, ce point se transportera en un point z', que l'on pourra considérer comme une nouvelle transformation du point z. Dans ce déplacement, l'observateur debout en ζ, sur la surface extérieure de la sphère, viendra se placer debout en z', *au-dessous* du plan tangent à la sphère en O′, auquel nous donnerons, pour cette raison, le nom de plan *antipode* du plan horizontal.

Pour l'observateur ainsi transporté, les mouvements autour de l'axe OO′ qui, dans sa position primitive, s'effectuaient pour lui de droite à gauche ou dans le sens *direct*, s'effectueront maintenant de gauche à droite ou dans le sens *rétrograde*. Si donc on continue à considérer comme *positifs* les angles décrits dans le sens direct, il faudra prendre, dans le plan antipode, les angles décrits autour de l'axe des pôles avec un signe contraire à celui qu'on leur attribuait dans le plan horizontal, leur valeur numérique restant la même.

De plus, les distances Oz et $O'z'$ ayant pour valeurs $\tang \upsilon$ et $\cot \upsilon$, leur produit est égal à l'unité.

Donc, si l'on rapporte le point z' à l'origine O' et à un axe $O'x'$, qui soit la projection de Ox sur le plan antipode, et si on le représente, en conséquence, par

$$z' = r' e^{ip'},$$

on devra prendre

$$r' = \frac{1}{r}, \quad p' = -p,$$

d'où il résulte

$$z' = \frac{1}{z}.$$

Donc, en adoptant les conventions précédentes, la nouvelle variable z' sera une fonction monogène de l'ancienne variable z, et par suite [1103] toute fonction monogène de z sera aussi une fonction monogène de z', et réciproquement.

On voit, de plus, qu'à une valeur infinie de l'une des deux variables z, z' correspond une valeur nulle de l'autre, et *vice versa*. On peut donc, à l'aide de cette transformation, remplacer l'étude d'une fonction pour des valeurs infiniment grandes de la variable par l'étude de la même fonction dans le voisinage de la valeur zéro de la variable réciproque. Ainsi l'ensemble de ces deux plans des z et des z' équivaut à la sphère comme moyen de représentation, dans un espace fini, de toutes les valeurs, tant finies qu'infinies, de la variable z.

§ III.

INTÉGRALES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE, PRISES LE LONG D'UN CONTOUR DONNÉ.

1115. Nous appellerons *aire* une portion de plan limitée de toutes parts, et *contour* de l'aire la ligne ou l'ensemble de lignes qui limitent cette aire.

Une aire sera dite *simplement connexe* lorsque son contour sera formé d'un seul trait continu, de manière qu'on puisse parcourir entièrement ce contour sans pénétrer dans l'aire. Telles sont les aires du triangle, du cercle, etc.

Une aire sera dite *doublement, triplement, ... connexe* si son contour se compose de deux, de trois, ... parties fermées qui ne se rencontrent pas, et telles qu'on ne puisse passer de l'une à l'autre sans pénétrer dans l'intérieur de l'aire. L'espace compris entre deux cercles concentriques est une aire doublement connexe.

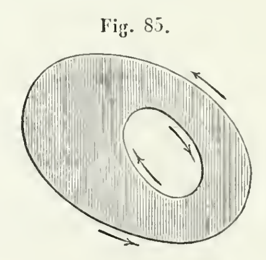
1116. Une même ligne servant de limite à la fois aux deux portions de plan qu'elle sépare, il importe de distinguer, par une convention relative au sens dans lequel on suppose cette ligne parcourue, celle des deux portions du plan que l'on considère comme étant le champ de variation de la quantité z.

Imaginons un observateur debout sur la partie *supérieure* du plan, et faisant le tour de l'aire considérée, de manière à avoir constamment cette aire *à sa gauche*. Le sens dans lequel devra marcher cet observateur s'appellera le *sens direct* ou la *direction positive* du contour de cette aire. Le sens opposé s'appellera le *sens rétrograde* ou la *direction négative* du contour.

Si l'on considère tour à tour comme *aire* les deux portions de plan limitées par la même ligne, le sens qui sera direct par rapport à l'une sera rétrograde par rapport à l'autre. Il suffira d'indiquer le sens que l'on considère comme direct, pour que l'on sache par cela même de laquelle des deux portions du plan il doit être question.

Ainsi, dans la *fig.* 85, les flèches qui indiquent le sens direct

Fig. 85.



pour chacun des deux contours montrent que l'aire que l'on veut considérer est la portion ombrée, comprise entre les deux courbes.

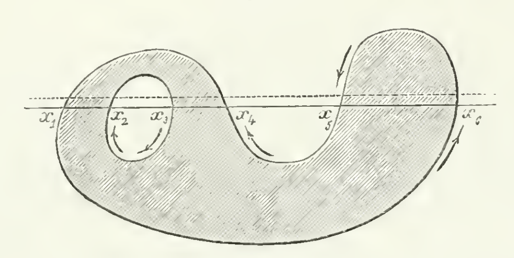
1117. Une droite indéfinie dans les deux sens, menée à travers une aire, rencontre nécessairement le contour de l'aire un nombre

pair de fois, autant de fois pour entrer dans l'aire que pour en sortir.

Supposons d'abord cette droite parallèle à l'axe des x, et parcourue dans le sens des x croissants. Si l'on représente par x_1, $x_2, \ldots, x_{2n}$ les abscisses des points de rencontre consécutifs de cette droite avec le contour, les abcisses d'indices *impairs* correspondront à des points d'*entrée*, les abscisses d'indices *pairs* à des points de *sortie*.

Si un point s'avance sur le contour de l'aire représentée par la partie ombrée de la *fig.* 86, de manière que sa projection sur

Fig. 86.



l'axe des y marche dans le sens des y croissants; si ce point passe *du dessous au dessus* de la parallèle aux x, ce point marchera dans le sens *rétrograde* à chaque *entrée* de cette parallèle, et dans le sens *direct* à chaque *sortie*. Cela revient à dire que, si un point parcourt le contour constamment dans le sens *direct*, l'élément qu'il décrit en passant par un point de *sortie* fait un angle *aigu* avec la partie positive de l'axe des y; l'élément qu'il décrit en passant par un point d'*entrée* fait un angle *obtus* avec cette même partie positive.

D'après cela, si l'on désigne par dy_k la variation de l'ordonnée y du point mobile sur le contour lorsqu'il rencontre la parallèle aux x à l'extrémité de l'abscisse x_k, dy_k sera positif ou négatif suivant que x_k correspondra à un point de sortie ou à un point d'entrée, c'est-à-dire suivant que l'indice k sera pair ou impair. Si l'on désigne donc par dy la distance absolue de deux parallèles à l'axe des x infiniment voisines, on aura, en général,

$$dy_k = (-1)^k dy.$$

1118. Soit maintenant $V = V(x, y)$ une fonction, réelle ou complexe, des deux variables réelles x, y, qui soit continue (et par suite finie) dans toute l'étendue d'une aire donnée $\mathfrak{A}$, y compris le contour de cette aire. Supposons, de plus, que la fonction V soit *uniforme* dans toute cette étendue, c'est-à-dire qu'elle ne soit susceptible que d'une seule valeur pour un système quelconque de valeurs de x et de y, correspondant à un point quelconque de l'aire ou de son contour. Il pourra se faire quelquefois que la dérivée $\frac{\partial V}{\partial x}$ ne soit pas toujours finie et continue; mais il nous suffit ici que la fonction V elle-même le soit [458].

Considérons l'intégrale double

$$\int\int_{\mathfrak{A}} \frac{\partial V}{\partial x}\, dx\, dy,$$

relative à tous les éléments $dx\,dy$ de l'aire $\mathfrak{A}$. Pour l'évaluer, nous couperons d'abord l'aire par des parallèles à l'axe des x infiniment rapprochées, et nous évaluerons la valeur de l'intégrale correspondante à la tranche infiniment mince comprise entre deux parallèles consécutives. Cette valeur se composera d'autant de parties qu'il y a de couples de points d'entrée et de sortie. On prendra l'intégrale indéfinie

$$dy \int \frac{\partial V}{\partial x}\, dx = V\, dy;$$

on ajoutera les valeurs de cette quantité correspondantes aux points de sortie, et l'on retranchera les valeurs correspondantes aux points d'entrée. Si l'on désigne donc par V_k la valeur de V qui répond à l'abscisse x_k, on devra ajouter les valeurs $V_k\, dy$ qui répondent à k pair, et retrancher celles qui répondent à k impair, ce qui donne, pour l'intégrale prise dans l'étendue de la tranche,

$$\Sigma (-1)^k V_k\, dy.$$

Or, d'après ce que nous avons vu dans le numéro précédent, si dy_k est la variation de l'ordonnée y d'un mobile parcourant le contour dans le sens direct, obtenue lorsque ce mobile traverse la tranche considérée au point (x_k, y), on a $dy_k = (-1)^k dy$. Donc la valeur de l'intégrale relative à la tranche peut s'exprimer par

$$\Sigma V_k\, dy_k.$$

Pour avoir maintenant l'intégrale double relative à l'aire totale $\mathfrak{A}$, il faudra faire la somme de toutes les expressions analogues à la précédente, en faisant varier y entre ses limites extrêmes. On obtiendra ainsi la somme des produits des valeurs de V relatives à tous les points du contour, multipliées respectivement par les variations correspondantes de l'ordonnée y d'un point mobile parcourant le contour dans le sens direct, lorsque ce point passe d'un point au point infiniment voisin.

Une telle somme s'appelle l'intégrale de l'expression $V\,dy$, *prise le long du contour de l'aire* $\mathfrak{A}$, et nous la désignerons par la notation

$$\int_{\mathfrak{A}} V\,dy.$$

On aura soin de se rappeler que la lettre $\mathfrak{A}$, mise au bas d'un signe de double intégration, indiquera toujours que l'intégrale se rapporte à tous les éléments superficiels de l'intérieur de l'aire, tandis que la même lettre, mise au bas d'un signe d'intégration simple, indiquera toujours que l'intégrale est prise le long du contour de l'aire.

D'après cela, l'intégrale double proposée se trouvera ramenée à une intégrale simple, prise le long du contour de l'aire, et l'on aura la formule

$$(1)\qquad \int\int_{\mathfrak{A}} \frac{\partial V}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\mathfrak{A}} V\,dy.$$

1119. Si l'on traite de même l'intégrale double

$$\int\int_{\mathfrak{A}} \frac{\partial U}{\partial y}\,dx\,dy,$$

U étant encore une fonction de x et de y uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, on parviendra à la formule

$$(2)\qquad \int\int_{\mathfrak{A}} \frac{\partial U}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{\mathfrak{A}} U\,dx,$$

le signe — provenant ici de ce que, dans une tranche parallèle à l'axe des y, les dx_k relatifs aux points d'entrée doivent être pris positivement, et les dx_k relatifs aux points de sortie négativement.

1120. En retranchant l'une de l'autre les équations (1) et (2), on obtient l'équation

$$(3) \qquad \int\int_{\mathfrak{A}} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\mathfrak{A}} (U\,dx + V\,dy),$$

d'où l'on conclut ce théorème :

Si U *et* V *sont deux fonctions des variables réelles* x, y, *uniformes et continues dans toute l'étendue de l'aire* $\mathfrak{A}$, *la valeur de l'intégrale double*

$$(4) \qquad \int\int_{\mathfrak{A}} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

étendue à tous les éléments superficiels $dx\,dy$ *de cette aire, est égale à la valeur de l'intégrale simple*

$$(5) \qquad \int_{\mathfrak{A}} (U\,dx + V\,dy),$$

prise en donnant à x *et à* y *successivement tous les systèmes de valeurs qui correspondent aux divers points du contour total de l'aire, lorsqu'on parcourt ce contour dans le sens direct.*

1121. Si l'expression $U\,dx + V\,dy$ est une différentielle exacte [773], la différence $\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$ sera identiquement nulle pour toutes les valeurs de x et de y. Donc l'intégrale (4) s'annulera, et, comme l'égalité (3) ne cessera pas d'avoir lieu, l'intégrale (5) sera pareillement nulle. Donc :

Toutes les fois que, U *et* V *étant deux fonctions uniformes et continues des variables réelles* x, y, *dans toute l'étendue de l'aire* $\mathfrak{A}$, *l'expression* $U\,dx + V\,dy$ *sera une différentielle exacte, c'est-à-dire toutes les fois qu'on aura*

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

l'intégrale $\int_{\mathfrak{A}} (U\,dx + V\,dy)$, *prise le long du contour de l'aire* $\mathfrak{A}$, *sera nulle.*

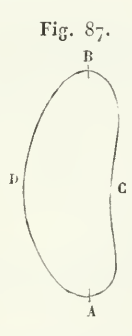
Ce qui a lieu pour l'aire totale $\mathfrak{A}$ est également vrai pour toute partie de cette aire. Donc l'intégrale (5) est encore nulle, lorsqu'on la prend tout le long d'une courbe fermée quelconque tracée à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$.

Remarquons que, dans le cas d'une aire à connexion multiple, comme celle que représente la *fig.* 86, on ne doit pas considérer comme un contour fermé tracé *à l'intérieur* de l'aire une courbe qui renfermerait dans son intérieur une enclave n'appartenant pas à l'aire. Par exemple, le théorème précédent ne s'appliquerait pas au cas où, l'aire $\mathfrak{A}$ étant comprise entre deux cercles concentriques, la courbe fermée serait un troisième cercle de même centre, tracé entre les deux premiers. Cela tient à ce que ce troisième cercle ne forme qu'une partie du contour *total* de la portion de l'aire $\mathfrak{A}$ comprise dans son intérieur.

1122. Il est aisé de voir que, si l'on prend une même intégrale quelconque, telle que $\int(\mathrm{U}\,dx + \mathrm{V}\,dy)$, le long d'une même ligne, fermée ou non, en parcourant tour à tour cette ligne dans les deux sens opposés, les deux valeurs obtenues pour l'intégrale se composeront d'éléments égaux respectivement et de signes contraires. Donc les deux valeurs de l'intégrale seront égales et de signes contraires.

1123. Cela posé, désignons, pour un instant, par $\int(\mathrm{ADB})$

Fig. 87.



(*fig.* 87) la valeur d'une certaine intégrale prise le long de l'arc ADB, cet arc étant parcouru dans le sens indiqué par l'ordre des lettres. On aura

$$\int(\mathrm{ADB}) = -\int(\mathrm{BDA}).$$

On a d'ailleurs évidemment

$$\int(\text{ACBDA}) = \int(\text{ACB}) + \int(\text{BDA});$$

on peut donc écrire aussi

$$\int(\text{ACBDA}) = \int(\text{ACB}) - \int(\text{ADB}).$$

Si maintenant l'intégrale $\int(\text{ACBDA})$, étendue au contour fermé tout entier, est nulle, on en conclura

$$\int(\text{ACB}) = \int(\text{ADB}).$$

Donc, si l'intégrale considérée est nulle quand on la prend tout le long du contour de l'aire $\mathfrak{A}$ ou d'une courbe fermée quelconque tracée à l'intérieur de cette aire, la valeur de cette intégrale, prise le long d'une courbe tracée entre les points A et B, et *située tout entière à l'intérieur de l'aire,* restera la même, quelle que soit cette courbe, et ne dépendra que de la position des points extrêmes A et B.

C'est ce qui aura lieu en particulier lorsque cette intégrale sera de la forme considérée plus haut $\int(\text{U}\,dx + \text{V}\,dy)$, U et V étant des fonctions uniformes et continues de x et de y, et $\text{U}\,dx + \text{V}\,dy$ étant une différentielle exacte.

1124. Soit maintenant $w = u + iv$ une fonction synectique de la variable $z = x + iy$, et supposons que cette fonction soit continue dans l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$. On aura [1098]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Donc chacune des expressions

$$v\,dx + u\,dy, \quad u\,dx - v\,dy$$

est une différentielle exacte. Donc, en vertu du théorème du n° 1121, chacune des intégrales

$$\int_{\mathfrak{A}}(v\,dx + u\,dy), \quad \int_{\mathfrak{A}}(u\,dx - v\,dy)$$

est nulle, et il en est de même de la somme

$$\int_{\mathfrak{A}} (u\,dx - v\,dy) + i \int_{\mathfrak{A}} (v\,dx + u\,dy) = \int_{\mathfrak{A}} (u + iv)(dx + i\,dy)$$
$$= \int_{\mathfrak{A}} w\,dz.$$

Par conséquent, *si w est une fonction synectique de la variable complexe z qui soit continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, l'intégrale $\int_{\mathfrak{A}} w\,dz$, prise le long du contour de cette aire (ou, plus généralement, le long d'une courbe fermée quelconque tracée dans cette aire), est nulle.*

1125. On en conclut encore que l'intégrale $\int_{z_0}^{Z} w\,dz$, prise le long d'un chemin quelconque tracé à l'intérieur de l'aire entre les points z_0 et Z, est indépendante de la forme du chemin parcouru, et qu'elle ne dépend que de la nature de la fonction w et des seules limites z_0 et Z.

On peut voir, de plus, que cette intégrale est une fonction synectique de ces limites. Supposons, en effet, que l'on fasse varier une des limites Z de la quantité infiniment petite $Z_1 - Z = dZ$. L'intégrale croîtra de la quantité

$$\int_{Z}^{Z_1} w\,dz = \int_{Z}^{Z_1} (u + iv)(dx + i\,dy),$$

ou, en posant $Z = X + iY$, $Z_1 = X_1 + iY_1$,

$$\int_{Z}^{Z_1} w\,dz = \int_{X}^{X_1} [u(x, Y) + iv(x, Y)]\,dx + i \int_{Y}^{Y_1} [u(X_1, y) + iv(X_1, y)]\,dy$$
$$= (X_1 - X)[u(\xi, Y) + iv(\xi, Y)]$$
$$+ i(Y_1 - Y)[u(X_1, \eta) + iv(X_1, \eta)],$$

ξ désignant une valeur moyenne entre X et X_1, η une valeur moyenne entre Y et Y_1. Cette quantité différera infiniment peu de

$$(X_1 - X)[u(X, Y) + iv(X, Y)] + i(Y_1 - Y)[u(X, Y) + iv(X, Y)]$$
$$= [(X_1 - X) + i(Y_1 - Y)][u(X, Y) + iv(X, Y)] = (Z_1 - Z)\,w(Z).$$

Donc, lorsque Z_1 converge vers Z, le rapport $\frac{1}{Z_1 - Z}\int_Z^{Z_1} w\,dz$ convergera vers la limite $w(Z)$, indépendante de $Z_1 - Z$. Donc l'intégrale $\int_{z_0}^{Z} w\,dz$ a une dérivée par rapport à sa limite supérieure Z, et cette dérivée est la valeur de la fonction qui multiplie dz sous le signe $\int$, dans laquelle on aura remplacé z par cette limite supérieure.

Cette intégrale, satisfaisant à la condition de monogénéité, peut donc être considérée comme une fonction synectique de sa limite supérieure, comme dans le cas d'une variable réelle. Il en sera évidemment de même pour la limite inférieure, de sorte qu'on aura, comme au n° 470,

$$D_Z \int_{z_0}^{Z} w\,dz = w(Z), \quad D_{z_0} \int_{z_0}^{Z} w\,dz = -w(z_0).$$

1126. D'après cela, les intégrales définies des fonctions d'une variable complexe uniformes et continues dans l'étendue d'une aire $\mathfrak{A}$ jouissent de propriétés analogues à celles des intégrales définies des fonctions d'une variable réelle, établies dans le § IV du Chapitre II du Livre I.

Ainsi, ζ étant un point quelconque de l'aire $\mathfrak{A}$, on aura [245]

$$\int_{z_0}^{Z} w\,dz = \int_{z_0}^{\zeta} w\,dz + \int_{\zeta}^{Z} w\,dz,$$

d'où l'on déduira les mêmes conséquences qu'aux n°s 245 et 246.

On peut donc remplacer une intégrale $\int_{z_0}^{Z} w\,dz$, dont les deux limites sont variables, par la différence

$$\int_{c}^{Z} w\,dz - \int_{c}^{z_0} w\,dz$$

de deux intégrales, dont chacune a une seule limite variable.

On a de plus [1122]

$$\int_{z_0}^{Z} w\,dz = -\int_{Z}^{z_0} w\,dz.$$

Enfin, toutes les fonctions dont la dérivée est $w = w(z)$ dans l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$ sont comprises dans la formule

$$\int_{z_0}^{z} w\,dz + C,$$

C étant une constante indépendante du chemin parcouru pour aller de z_0 en z. Si l'on désigne par $F(z)$ une quelconque de ces fonctions, telles que $F'(z) = w$, on aura, en éliminant C,

$$\int_{z_0}^{Z} w\,dz = F(Z) - F(z_0).$$

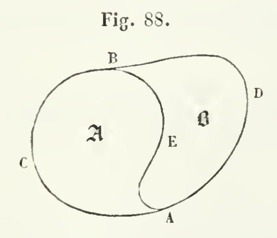
Si la fonction w est uniforme et continue dans toute l'étendue du plan, comme le sont les fonctions

$$e^z,\quad \cos z,\quad \sin z,\quad z^m \quad (m \text{ entier et positif}),$$

on pourra supposer l'aire $\mathfrak{A}$ aussi grande que l'on voudra, et prendre pour z_0 et Z deux points quelconques du plan. Pour de telles fonctions, le passage de l'intégrale définie $\int_{z_0}^{Z} w\,dz$ à l'intégrale indéfinie, et *vice versa*, se fera absolument comme dans le cas d'une variable réelle.

1127. Considérons une intégrale quelconque $\int(U\,dx + V\,dy)$, prise successivement le long des contours de deux aires $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ (*fig.* 88), ces contours, qui ont une partie commune, ne passant

Fig. 88.



par aucun point de discontinuité des fonctions *uniformes* U, V. Les intégrales prises le long de chacun de ces contours auront des valeurs finies et déterminées, quelles que soient les discontinuités

que les fonctions U, V peuvent présenter dans l'intérieur des deux aires.

Or on a, dans tous les cas,

$$\int_{\mathfrak{A}} (\mathrm{U}\,dx + \mathrm{V}\,dy) = \int(\mathrm{AEB}) + \int(\mathrm{BCA}),$$

$$\int_{\mathfrak{B}} (\mathrm{U}\,dx + \mathrm{V}\,dy) = \int(\mathrm{ADB}) + \int(\mathrm{BEA});$$

comme on a d'ailleurs [1122]

$$\int(\mathrm{AEB}) + \int(\mathrm{BEA}) = 0,$$

on en conclut

$$\int_{\mathfrak{A}} + \int_{\mathfrak{B}} = \int(\mathrm{BCA}) + \int(\mathrm{ADB}).$$

Mais la somme BCA + ADB forme le contour total de l'aire ADBCA $= \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$. Donc, en désignant par $\int_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}$ l'intégrale prise le long du contour de l'aire totale $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, on a, en général,

$$\int_{\mathfrak{A}} + \int_{\mathfrak{B}} = \int_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}.$$

Si l'on suppose maintenant que $\mathrm{U}\,dx + \mathrm{V}\,dy$ soit une différentielle exacte, et que les fonctions uniformes U, V soient continues dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, on aura alors $\int_{\mathfrak{A}} = 0$, et par conséquent

$$\int_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}} (\mathrm{U}\,dx + \mathrm{V}\,dy) = \int_{\mathfrak{B}} (\mathrm{U}\,dx + \mathrm{V}\,dy).$$

Donc, *l'intégrale prise le long du contour d'une aire quelconque* $\mathfrak{B}$ *ne change pas, lorsqu'on ajoute à l'aire* $\mathfrak{B}$ *une autre aire* $\mathfrak{A}$, *dans laquelle les fonctions* U *et* V *sont partout uniformes et continues.*

Il en résulte que *l'on peut aussi, sans changer la valeur de l'intégrale* $\int_{\mathfrak{B}} (\mathrm{U}\,dx + \mathrm{V}\,dy)$, *retrancher de l'aire* $\mathfrak{B}$ *toute portion de cette aire à l'intérieur de laquelle les fonctions* U *et* V *restent uniformes et continues.*

§ IV.

DES INTÉGRALES PRISES AUTOUR D'UN POINT (RÉSIDUS). REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION SYNECTIQUE SOUS LA FORME D'UN RÉSIDU.

1128. Soit $w = f(z)$ une fonction de la variable complexe z; supposons qu'elle reste uniforme dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, mais qu'elle présente, à l'intérieur de cette aire, des solutions de continuité en des points $c_1, c_2, \ldots$, en nombre fini, et isolés les uns des autres. Entourons chacun de ces points d'un contour fermé, aussi petit que l'on voudra, et désignons par

$$\int_c w\,dz$$

l'intégrale de $w\,dz$ prise le long du contour infiniment petit qui entoure le point c.

Si l'on considère la portion de l'aire $\mathfrak{A}$ qui resterait après la suppression des aires infinitésimales qui entourent les points de discontinuité, la fonction w sera uniforme et continue en chaque point de cette portion. On pourra donc, d'après le théorème du numéro précédent, supprimer cette portion d'aire sans changer la valeur de l'intégrale $\int_{\mathfrak{A}} w\,dz$. Donc cette intégrale est égale à la somme des intégrales prises le long des contours infinitésimaux tracés autour des points de discontinuité que renferme l'aire $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire que l'on aura

$$(1)\qquad \int_{\mathfrak{A}} w\,dz = \int_{c_1} w\,dz + \int_{c_2} w\,dz + \ldots.$$

Donc, pour évaluer une intégrale prise le long du contour d'une aire quelconque, il suffit de savoir évaluer une intégrale prise le long d'un contour infinitésimal tracé autour d'un point de discontinuité.

1129. Soit c un point de discontinuité de la fonction w, et voyons

comment on peut calculer la valeur de l'intégrale $\int_c w\,dz$, prise *autour de ce point.*

Cette intégrale étant, d'après ce que nous avons dit, indépendante de la forme du contour infinitésimal qui renferme le point de discontinuité c, on peut supposer que ce contour soit un cercle de centre c et de rayon infiniment petit ρ. Posons alors

$$z - c = \rho e^{i\varphi}.$$

Lorsqu'on fera faire au point z le tour de ce cercle, φ variera seul, et croîtra de 2π, si, comme dans le cas actuel, z fait une seule fois le tour de c. On aura donc

$$dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi = i(z-c)\,d\varphi,$$

et par suite

$$\int_c w\,dz = i\int_0^{2\pi} w(z-c)\,d\varphi.$$

1130. Supposons d'abord que, lorsque $z - c$ tend vers zéro, le produit

$$w(z-c) = f(z)(z-c)$$

converge vers une limite finie F (pouvant être nulle), c'est-à-dire que la quantité

$$\mathrm{F} = \lim_{\varepsilon=0}[\varepsilon f(c+\varepsilon)]$$

ait une valeur qui ne soit pas infinie. L'intégrale $\int_0^{2\pi} w(z-c)\,d\varphi$ est de la forme

$$\int_0^{2\pi} (\mathrm{X} + i\mathrm{Y})\,d\varphi,$$

X et Y étant des quantités réelles, dépendantes de la position du point z sur la circonférence, et par conséquent fonctions de la variable φ et du paramètre infiniment petit ρ. On a donc [247], en désignant par $\mathfrak{M}(\mathrm{X})$, $\mathfrak{M}(\mathrm{Y})$ des valeurs moyennes de X et de Y,

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{X}\,d\varphi = 2\pi\,\mathfrak{M}(\mathrm{X}), \quad \int_0^{2\pi} \mathrm{Y}\,d\varphi = 2\pi\,\mathfrak{M}(\mathrm{Y}).$$

Par conséquent,

$$\int_0^{2\pi} w(z-c)\,d\varphi = 2\pi[\mathfrak{M}(X) + i\mathfrak{M}(Y)].$$

Or le second membre a évidemment pour limite $2\pi F$ lorsqu'on y fait converger ρ vers zéro ou z vers c. Donc

$$(2) \qquad \int_c w\,dz = 2\pi i F, \quad \text{où} \quad F = \lim_{z=c} w(z-c).$$

La quantité

$$(3) \qquad F = \frac{1}{2\pi i}\int_c w\,dz$$

est ce que Cauchy appelle le *résidu* de la fonction w relatif au point c.

1131. Dans le cas où $\lim_{z=c} w(z-c)$ est infinie, nous continuerons à prendre l'équation (3) pour définition du *résidu*. Mais alors F n'aura plus la même expression que dans le cas précédent, et nous apprendrons plus tard à en déterminer la valeur.

On peut cependant obtenir immédiatement le résidu lorsque la fonction w est développable en une série convergente, finie ou infinie, ordonnée suivant les puissances négatives et positives de la différence $z-c$. Supposons, en effet, que le développement soit de la forme

$$w = \ldots + \frac{a_{-m}}{(z-c)^m} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-c} + a_0 + \ldots + a_n(z-c)^n + \ldots,$$

ou, en posant encore $z - c = \rho e^{i\varphi}$,

$$w = \ldots + \frac{a_{-m}}{\rho^m}e^{-mi\varphi} + \ldots + \frac{a_{-1}}{\rho}e^{-i\varphi} + a_0 + \ldots + a_n\rho^n e^{ni\varphi} + \ldots.$$

En multipliant les deux membres par $dz = i\rho e^{i\varphi}d\varphi$, et intégrant entre les limites $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$, on aura, pour toute valeur entière de ν autre que -1,

$$\int_0^{2\pi} a_\nu \rho^\nu e^{\nu i\varphi}.\, i\rho e^{i\varphi}\,d\varphi = ia_\nu\rho^{\nu+1}\int_0^{2\pi} e^{i(\nu+1)\varphi}\,d\varphi = 0,$$

tandis que, pour $\nu = -1$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{a_{-1}}{\rho} e^{-i\varphi}.i\rho e^{i\varphi} d\varphi = ia_{-1}\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.a_{-1}.$$

On verrait d'ailleurs, comme au n° 72, que, si R est le reste de la série, l'intégrale $\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mathrm{R}\,dz$ est infiniment petite en même temps que R. Donc $\int_c w\,dz$ se réduit à $2\pi i a_{-1}$, et, par suite, le résidu de la fonction relatif au point c sera

$$\mathrm{F} = \frac{1}{2\pi i}\int_c w\,dz = a_{-1}.$$

Donc, lorsqu'une fonction w, discontinue au point c, est développable en une série convergente, ordonnée suivant les puissances entières de $z-c$ et renfermant des puissances négatives de $z-c$ (sans quoi elle ne donnerait pas une valeur infinie pour $z=c$), le résidu de la fonction w relatif au point c sera égal au coefficient de la puissance -1 de $z-c$ dans le développement de w.

C'est ce dernier énoncé que Cauchy avait pris pour définition du résidu d'une fonction relatif au point c.

1132. Toutes les fois que la fonction w a une valeur finie au point c, alors l'intégrale prise autour du point c est nulle, puisque le contour peut être pris assez petit pour ne renfermer aucun infini de la fonction. Donc le résidu relatif à tout point qui n'est pas un infini est nul.

D'après la formule (1), l'intégrale prise le long du contour de l'aire totale $\mathfrak{A}$ est égale à $2\pi i$ multiplié par la somme des résidus de la fonction relatifs à tous les infinis contenus dans l'aire. D'après la remarque que nous venons de faire, on peut, sans altérer cette somme, y joindre la somme des résidus, tous égaux à zéro, relatifs à tous les autres points de l'aire, et alors l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} w\,dz$$

représentera la somme des résidus relatifs à tous les points de

l'aire. Cauchy l'a nommée, pour cette raison, le *résidu intégral* de l'aire $\mathfrak{A}$.

1133. Soit maintenant $f(z)$ une fonction uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, et soit c un point quelconque de l'intérieur de cette aire. La fonction

$$F(z) = \frac{f(z)}{z-c}$$

sera continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, excepté au point $z = c$. Donc l'intégrale $\int_{\mathfrak{A}} F(z)\,dz$, prise tout le long du contour de $\mathfrak{A}$, se réduira à l'intégrale de la même fonction prise autour du point c. Or on a [1130]

$$\int_c F(z)\,dz = 2\pi i . \lim_{z=c}(z-c)\,F(z).$$

D'autre part,

$$\lim_{z=c}(z-c)\,F(z) = \lim_{z=c} f(z) = f(c).$$

On aura donc la formule fondamentale

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-c}\,dz,$$

ou, en substituant [1132] le contour de l'aire $\mathfrak{A}$ au contour infinitésimal tracé autour de c,

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)}{z-c}\,dz.$$

On conclut de là ce théorème :

Si $f(z)$ est une fonction uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, et z un point quelconque de l'intérieur de l'aire, la valeur de $f(z)$ en ce point est égale à la valeur du résidu de la fonction $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ relative au point z, c'est-à-dire que l'on a

$$(4)\qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_z \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

1134. La fonction $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ est continue sur tout le contour de $\mathfrak{A}$, non-seulement par rapport à la variable ζ, mais encore par rapport à la variable z, c'est-à-dire qu'elle varie d'une manière continue à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$. On peut donc la différentier par rapport à z, ce qui donne

$$\frac{\partial \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}}{\partial z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2},$$

$$\frac{1}{1.2} \frac{\partial^2 \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}}{\partial z^2} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{1}{1.2\dots n} \frac{\partial^n \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}}{\partial z^n} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

On voit que toutes ces dérivées sont également continues tout le long du contour de $\mathfrak{A}$.

1135. Cela posé, soit $\varphi(\zeta, z)$ une fonction des variables ζ et z, continue par rapport à chacune d'elles toutes les fois que le point ζ reste sur le contour de l'aire $\mathfrak{A}$ et le point z à l'intérieur de cette même aire. L'intégrale

$$\Phi(z) = \int_{\mathfrak{A}} \varphi(\zeta, z)\, d\zeta$$

sera une fonction de z. Si l'on change z en $z + dz$, on aura

$$\Phi(z + dz) = \int_{\mathfrak{A}} \varphi(\zeta, z + dz)\, d\zeta,$$

d'où

$$\frac{\Phi(z + dz) - \Phi(z)}{dz} = \int_{\mathfrak{A}} \frac{\varphi(\zeta, z + dz) - \varphi(\zeta, z)}{dz}\, d\zeta.$$

Si l'on suppose maintenant dz infiniment petit, il viendra, à la limite,

$$\frac{d\Phi(z)}{dz} = \int_{\mathfrak{A}} \frac{\partial \varphi(\zeta, z)}{\partial z}\, d\zeta.$$

On voit donc que la règle de la différentiation sous le signe $\int$ [470] s'applique aussi aux intégrales prises le long d'un contour fermé, pourvu que la fonction $\varphi(\zeta, z)$ et sa dérivée $D_z\varphi(\zeta, z)$ par rapport au paramètre z restent l'une et l'autre finies lorsque ζ parcourt le contour.

Si la fonction $\varphi(\zeta, z)$ et sa dérivée $D_z\varphi(\zeta, z)$, considérées comme fonctions de ζ, n'ont pas d'autre infini que le point z dans l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$, on pourra substituer à leurs intégrales prises le long du contour de $\mathfrak{A}$ leurs intégrales prises autour du point z [1128], et la formule précédente deviendra

$$D_z\left[\int \varphi(\zeta, z)\,d\zeta\right] = \int_z \frac{\partial\varphi(\zeta, z)}{\partial z}\,d\zeta,$$

ce qui est la formule pour la différentiation des résidus.

En appliquant cette formule à la fonction $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, on tirera de la formule (4), en vertu des égalités du numéro précédent, les relations

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^2},\\ \frac{f''(z)}{1.2} &= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^3},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \frac{f^{(n)}(z)}{1.2\ldots n} &= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \end{aligned}\right.$$

toutes les intégrales étant prises soit autour du point z, soit le long du contour d'une aire quelconque $\mathfrak{A}$ entourant le point z et ne renfermant aucun point de discontinuité de la fonction $f(z)$.

1136. Ces relations conduisent immédiatement à une conséquence importante. Les fonctions sous le signe $\int$, dans les seconds membres des formules (5), étant toutes finies et continues toutes les fois que z désigne un point situé à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$, les intégrales auront toutes des valeurs finies. Donc toutes les dérivées de $f(z)$ sont des quantités finies dans l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$.

Il s'ensuit également de là que ces dérivées sont aussi continues, car, si $f^{(n+1)}(z)$ est une quantité finie, ε désignant un infi-

niment petit, l'accroissement

$$f^{(n)}(z+dz)-f^{(n)}(z)=[f^{(n+1)}(z)+\varepsilon]\,dz$$

sera infiniment petit en même temps que dz, d'où l'on conclut la continuité de la fonction $f^{(n)}(x)$. Il en sera de même, par conséquent, de toutes les dérivées précédentes.

Donc, *si une fonction est uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire* $\mathfrak{A}$, *toutes les dérivées de cette fonction seront aussi des fonctions uniformes et continues dans toute l'étendue de la même aire.*

1137. Supposons qu'une fonction $f(z)$ soit toujours uniforme, finie et continue dans toute l'étendue du plan. Prenons pour aire un cercle de rayon R, et soit

$$\zeta = \mathrm{R}e^{i\varphi}, \quad \text{d'où} \quad d\zeta = i\zeta\,d\varphi.$$

On aura alors

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\zeta)\,d\varphi}{1-\dfrac{z}{\zeta}}.$$

Or, pour R infiniment grand, $f(\zeta)$ restant, par hypothèse, toujours finie, l'intégrale précédente sera finie et différera infiniment peu de

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\zeta)\,d\varphi,$$

quantité finie et indépendante de z. Donc $f(z)$ est aussi indépendante de z et se réduit à une constante.

Donc *toute fonction uniforme de z qui ne se réduit pas à une constante doit devenir infinie pour quelque valeur finie ou infinie de z.*

1138. Si la fonction $f(z)$ ne se réduit pas à une constante, il en sera de même de $\dfrac{1}{f(z)}$, et cette dernière fonction devra présenter aussi un ou plusieurs infinis. Donc la fonction $f(z)$ devra présenter un ou plusieurs zéros.

Une seule des deux fonctions $f(z)$, $\dfrac{1}{f(z)}$ pouvant devenir infinie

pour $z = \infty$, l'autre devra avoir un infini pour quelque valeur finie de z; de même pour les zéros. Donc *toute fonction uniforme a au moins soit un zéro, soit un infini, situé à une distance finie de l'origine.*

En particulier, une fonction entière $f(z)$, ne devenant infinie que pour $z = \infty$, devra s'annuler une fois au moins pour une valeur finie de z, ce qui nous donne une autre démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques [87].

La fonction $f(z) - k$ devant avoir au moins un zéro, on voit qu'*une fonction uniforme $f(z)$ reçoit, dans l'étendue du plan, toutes les valeurs possibles, y compris zéro et l'infini.*

1139. Nous n'avons considéré jusqu'à présent que les valeurs de $f(z)$ correspondantes aux valeurs finies de z. Pour étudier la valeur correspondante à $z = \infty$, nous aurons recours à la transformation par rayons réciproques du n° 1114, en posant

$$z = \frac{1}{z'}, \quad \text{d'où} \quad f(z)\,dz = -f\left(\frac{1}{z'}\right)\frac{dz'}{z'^2}.$$

Soit $\mathfrak{A}$ une aire qui comprenne tous les infinis de la fonction $f(z)$ correspondants à des valeurs finies de z. Le contour de $\mathfrak{A}$ sera représenté sur le plan des z' par un nouveau contour entourant une aire $\mathfrak{A}'$, en dehors de laquelle se trouveront tous les points z' qui correspondent aux points z situés à l'intérieur de $\mathfrak{A}$; l'aire $\mathfrak{A}'$ ne contiendra donc dans son intérieur aucun infini de la fonction $f(z)$ ou $f\left(\frac{1}{z'}\right)$, à l'exception de celui qui répondra à $z = \infty$ ou à $z' = 0$.

Le résidu intégral de l'aire $\mathfrak{A}'$ se réduira, par conséquent, au résidu relatif au point $z' = 0$, le seul infini de la fonction $f\left(\frac{1}{z'}\right)$ ou $f(z)$ qui soit contenu dans $\mathfrak{A}'$. On aura donc

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}'} f\left(\frac{1}{z'}\right)\frac{dz'}{z'^2} = -\frac{1}{2\pi i}\int_0 f\left(\frac{1}{z'}\right)\frac{dz'}{z'^2}.$$

Or, quand on parcourt le contour de $\mathfrak{A}'$ dans le sens direct relativement à l'aire intérieure à ce contour, l'intégrale se compose d'éléments respectivement égaux aux éléments de l'intégrale

$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} f(z)\,dz$, prise en laissant l'*extérieur* de ce contour à sa gauche, et, par suite, ces éléments sont égaux et de signe contraire à ceux de l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} f(z)\,dz$, prise dans le sens direct par rapport à l'*intérieur* de l'aire $\mathfrak{A}$. On aura donc, en vertu de l'égalité précédente,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} f(z)\,dz = +\frac{1}{2\pi i}\int_0 f'\left(\frac{1}{z'}\right)\frac{dz'}{z'^2}.$$

Donc le résidu intégral relatif à tous les infinis de $f(z)$ autres que $z=\infty$ est égal à *plus* le résidu de la fonction $\frac{1}{z'^2}f\left(\frac{1}{z'}\right)$ relatif à $z'=0$.

Il s'ensuit de là que, si

$$z'\frac{1}{z'^2}f\left(\frac{1}{z'}\right)=\frac{1}{z'}f\left(\frac{1}{z'}\right)=zf(z)$$

a une limite *nulle* ou *finie* F pour $z'=0$ ou pour $z=\infty$ [1130], on aura, pour le résidu intégral de $f(z)$ relatif à l'aire $\mathfrak{A}$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} f(z)\,dz = \text{F}.$$

Exemple. — Soit une fonction rationnelle $\frac{\mathrm{f}(z)}{\mathrm{F}(z)}$, $\mathrm{f}(z)$ et $\mathrm{F}(z)$ étant deux polynômes, l'un du degré m, l'autre du degré n, savoir

$$\mathrm{f}(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_mz^m,$$
$$\mathrm{F}(z)=b_0+b_1z+\ldots+b_nz^n.$$

On tire de là

$$\frac{\mathrm{f}\left(\frac{1}{z'}\right)}{z'^2\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{z'}\right)}=z'^{\,n-m-2}\frac{a_m+a_{m-1}z'+\ldots}{b_n+b_{n-1}z'+\ldots}.$$

La fraction du second membre pourra, par simple division, se

mettre sous la forme $\frac{a_m}{b_n} + \alpha_1 z' + \alpha_2 z'^2 + \ldots$, d'où, en posant $n - m - 2 = -\mu$,

$$\frac{f\left(\frac{1}{z'}\right)}{z'^2 F\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{a_m}{b_n} z'^{-\mu} + \alpha_1 z'^{-\mu+1} + \ldots + \alpha_{\mu-1} z'^{-1} + \omega_\mu.$$

En intégrant les deux membres le long du contour de $\mathfrak{A}'$, comme au n° **1131**, on a, le résidu de ω_μ étant nul,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0 \frac{f\left(\frac{1}{z'}\right) dz'}{z'^2 F\left(\frac{1}{z'}\right)} = \alpha_{\mu-1}.$$

Donc, pour $m - n + 2 = \mu > 1$, ou $n < m + 1$, on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)}{F(z)} dz = \alpha_{\mu-1},$$

ou, d'après ce que nous verrons plus loin [**1158**],

$$= \frac{1}{(m - n + 1)!} \lim_{\varepsilon = 0} D_\varepsilon^{m-n+1} . \varepsilon^{m-n} \frac{f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

Pour $\mu = 1$, ou $n = m + 1$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(z)}{F(z)} dz = \frac{a_m}{b^n}.$$

Enfin, pour $\mu < 1$ ou $n \gtreqless m + 2$, le résidu intégral est nul.

On aurait obtenu immédiatement ces deux derniers résultats en cherchant la limite, pour $z = \infty$, de l'expression $z\frac{f(z)}{F(z)}$.

§ V.

THÉORÈMES DE CAUCHY ET DE LAURENT.

1140. Soit c un point de l'aire $\mathfrak{A}$. De l'identité

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - c) - (z - c)}\\ &= \frac{1}{\zeta - c} + \frac{z - c}{(\zeta - c)^2} + \ldots + \frac{(z - c)^{n-1}}{(\zeta - c)^n} + \frac{(z - c)^n}{(\zeta - c)^n(\zeta - z)}\end{aligned}$$

on tire, en multipliant les deux membres par $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)d\zeta$ et intégrant tout le long du contour de $\mathfrak{A}$,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = f(z) = a_0 + a_1(z - c) + a_2(z - c)^2 + \ldots\\ + a_{n-1}(z - c)^{n-1} + \Omega_n,\end{aligned}\right.$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - c},\\ a_1 &= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - c)^2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ a_{n-1} &= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - c)^n},\end{aligned}$$

où les intégrales sont prises soit autour du point c, soit le long du contour de l'aire $\mathfrak{A}$, et

$$(2)\qquad \Omega_n = \frac{1}{2\pi i}(z - c)^n \int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - c)^n(\zeta - z)}.$$

Des équations (4) et (5) des nos 1133 et 1135, il résulte que l'on a

$$a_0 = f(c),\quad a_1 = \frac{f'(c)}{1},\quad \ldots,\quad a_{n-1} = \frac{f^{(n-1)}(c)}{1.2\ldots(n-1)}.$$

Donc

$$(3)\quad f(z)=f(c)+\frac{f'(c)}{1}(z-c)+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(c)}{1.2\ldots(n-1)}(z-c)^{n-1}+\Omega_n,$$

formule qui contient le *théorème de Cauchy,* lequel est une généralisation du théorème de Taylor.

Si le terme complémentaire Ω_n est infiniment petit pour n infiniment grand, la formule (3) donnera le développement de la fonction $f(z)$ en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de la différence $z-c$. Cette série coïncide avec la série de Taylor dans le cas particulier où z et c sont réels.

1141. Supposons que l'aire $\mathfrak{A}$, à l'intérieur de laquelle la fonction $f(z)$ reste finie et continue, soit un cercle de centre c et de rayon R, et posons

$$\zeta-c=\mathrm{R}e^{i\varphi},$$

d'où $\frac{d\zeta}{\zeta-c}=i\,d\varphi$. On aura alors

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\zeta)\,d\varphi,\quad a_1=\frac{1}{2\pi\mathrm{R}}\int_0^{2\pi}f(\zeta)\,e^{-i\varphi}d\varphi,\quad\ldots,$$

$$a_{n-1}=\frac{1}{2\pi\mathrm{R}^{n-1}}\int_0^{2\pi}f(\zeta)\,e^{-(n-1)i\varphi}d\varphi,$$

où il faudra remplacer ζ par $c+\mathrm{R}e^{i\varphi}$. En faisant, de plus,

$$z-c=re^{ip},$$

on aura

$$\Omega_n=\left(\frac{r}{\mathrm{R}}\right)^n e^{nip}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{e^{ni\varphi}(\zeta-z)}.$$

Dans cette intégrale, la quantité sous le signe $\int$ est finie en tout point du contour, puisque le point z est intérieur à l'aire. Donc l'intégrale a toujours une valeur finie. D'autre part, le facteur $\left(\frac{r}{\mathrm{R}}\right)^n$, en dehors du signe $\int$, est infiniment petit pour n infiniment grand. On en conclut ce théorème :

Pour qu'une fonction $f(z)$ soit développable suivant les puissances entières et positives de la différence $z-c$, il suffit que le point z soit intérieur à un cercle décrit du point c comme centre,

avec un rayon tel que la fonction $f(z)$ soit uniforme et continue en tout point intérieur à ce cercle.

En d'autres termes, *il suffit que le module de $z - c$ soit moindre que la distance du point c au point le plus voisin de c pour lequel la fonction cesse d'être uniforme et continue.*

Le cercle décrit du centre c et passant par le point de discontinuité le plus voisin de c s'appelle le *cercle de convergence* de la série.

1142. Si l'on a $c = 0$, alors la série (3) représentera le développement de la fonction $f(z)$ suivant les puissances positives et entières de la variable z, et elle contiendra, comme cas particulier, la série de Maclaurin.

Le cercle de convergence, qui aura pour centre l'origine, aura pour rayon le module de la plus petite racine de l'équation $f(z) = \infty$, la fonction $f(z)$ étant supposée uniforme à l'intérieur de ce cercle.

1143. Le théorème de Cauchy fournit immédiatement la condition pour qu'une fonction $f(x)$ d'une variable réelle soit développable en série convergente suivant les puissances entières et positives de la différence $x - c$, ou de la variable x. On remplacera la variable réelle x par $c + z$ ou par z, z étant une variable complexe, et l'on cherchera la racine de plus petit module de l'équation $f(c + z) = \infty$ ou $f(z) = \infty$. Le module de cette racine sera la limite supérieure des valeurs numériques de $x - c$ ou de x pour lesquelles le développement sera possible.

Par exemple, si l'on considère la fonction

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1},$$

traitée au n° 353, la racine de moindre module de l'équation

$$\frac{z}{e^z - 1} = \infty, \quad \text{ou} \quad \frac{e^z - 1}{z} = 0$$

est $z = 2\pi i$. Donc 2π est le rayon du cercle de convergence pour le développement de cette fonction suivant les puissances entières et positives de x.

Pour le développement analogue de la fonction $\frac{x}{e^x+1}$, on verrait, soit directement de la même manière, soit en s'appuyant sur les calculs du nº 353, que le cercle de convergence a pour rayon π.

Enfin, pour le développement de Thx ou de tang$x$, on trouverait pareillement que le cercle de convergence a pour rayon $\frac{\pi}{2}$. Il en est de même pour le développement de sécx.

1144. Supposons maintenant que l'on donne les valeurs d'une fonction $f(z)$ pour une suite continue de points formant un élément superficiel ou linéaire, d'une grandeur finie et constante, aussi petite que l'on voudra, et soient $c, c', c'', \ldots$ des points de cet élément infiniment voisins.

Si l'on suppose que la fonction $f(z)$ doive être monogène, sa dérivée en un point donné sera indépendante de la direction de l'accroissement infiniment petit de z, qui entre dans le rapport différentiel, et l'on pourra toujours supposer que les accroissements de z aient lieu sur l'élément considéré. On connaîtra dès lors, pour $z=c$, la valeur de la fonction $f(c)$; puis, pour ce point et les points infiniment voisins, les valeurs de la dérivée première,

$$f'(c)=\lim\frac{f(c')-f(c)}{c'-c},\quad f'(c')=\lim\frac{f(c'')-f(c')}{c''-c'},\quad \ldots;$$

puis les valeurs de la dérivée seconde,

$$f''(c)=\lim\frac{f'(c')-f'(c)}{c'-c},\quad \ldots,$$

et ainsi de suite. En appliquant la formule (8), on obtiendra donc le développement de la fonction suivant les puissances de $z-c$, et, par suite, on connaîtra toutes les valeurs de la fonction à l'intérieur du cercle de convergence C, décrit du centre c, avec un rayon déterminé par la connaissance du point de discontinuité le plus voisin de c que doive avoir la fonction.

Prenons actuellement pour nouveau centre un point c_1, intérieur au cercle C, mais aussi voisin que l'on voudra de la circonférence de ce cercle, et décrivons de ce centre c_1 un nouveau cercle de convergence C_1, qui comprendra, en général, des points du plan exté-

rieurs au cercle C. On obtiendra alors un nouveau développement suivant les puissances de $z - c_1$, qui fera connaître toutes les valeurs de la fonction pour tous les points de l'intérieur de C_1.

En prenant, de même, pour troisième centre un point c_2 intérieur à C_1, on obtiendra un nouveau cercle de convergence C_2, qui comprendra une nouvelle portion du plan, et, au moyen du développement de la fonction suivant les puissances de $z - c_2$, on pourra calculer toutes les valeurs de la fonction à l'intérieur de C_2.

En continuant de cette manière, on pourra embrasser dans l'ensemble de ces cercles tracés entre les points de discontinuité tous les points z du plan que l'on voudra, et alors, pour chacun de ces points, on aura un développement de la fonction donnée en série convergente. On aura même plusieurs développements pour les points qui seront intérieurs à la fois à plusieurs cercles de convergence.

On voit par là que, si l'on connaît 1° toutes les valeurs de la fonction aux divers points d'un élément quelconque, superficiel ou linéaire, 2° les positions des points de discontinuité de cette fonction, et 3° si l'on impose à cette fonction la condition d'être monogène et uniforme, cette fonction sera complétement déterminée dans toute l'étendue du plan.

1145. Si la fonction $f(z)$ doit rester constante dans l'élément considéré, alors, pour deux points infiniment voisins c, c' de cet élément, on aura rigoureusement $f(c) = f(c')$, et par suite

$$f'(c) = \lim \frac{f(c') - f(c)}{c' - c} = 0,$$

et de même $f'(c') = 0$, d'où $f''(c) = 0$, et ainsi de suite. Si l'on prend maintenant le point c comme centre du cercle de convergence, la formule de développement (3) se réduira à

$$f(z) = f(c) + \Omega_n,$$

quelque grand que soit n, et, comme Ω_n est infiniment petit pour n infiniment grand, il en résulte que l'on a rigoureusement

$$f(z) = f(c) = \text{const.}$$

dans toute l'étendue du cercle de convergence.

En raisonnant maintenant comme dans le numéro précédent, on étendra successivement la démonstration à tous les points du plan.

Donc une fonction uniforme et continue à l'intérieur d'une aire $\mathfrak{A}$ ne peut rester constante dans l'étendue d'un élément fini quelconque, superficiel ou linéaire, aussi petit que l'on voudra, à moins que cette fonction ne se réduise à une constante dans toute l'étendue de l'aire.

Il en résulte immédiatement que deux fonctions uniformes et continues ne peuvent être égales dans toute l'étendue d'un élément fini sans l'être dans toute l'étendue de l'aire.

Remarque. — Les zéros (et les infinis) d'une fonction doivent être nécessairement isolés; car, s'ils étaient infiniment rapprochés, ils formeraient un élément continu, sur lequel la fonction présenterait une valeur constante, et l'on en conclurait alors, d'après ce qu'on vient de démontrer, que la fonction devrait rester constante dans toute l'étendue du plan.

Un infini de première espèce ne peut être non plus à une distance infiniment petite d'un zéro, car alors l'inverse de la fonction serait discontinu en ce point, aussi bien que la fonction elle-même, et l'infini ne serait plus de première espèce.

1146. Dans l'évaluation des intégrales qui représentent les coefficients a_n [1141], on peut substituer au contour du cercle de convergence celui d'un cercle de même centre et de rayon moindre, et la valeur d'un coefficient quelconque

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(c + \mathrm{R}e^{i\varphi})}{\mathrm{R}^n e^{ni\varphi}}\, d\varphi$$

n'en sera pas altérée. On voit donc que cette intégrale est indépendante de la valeur du module R, tant que ce module n'atteint pas le rayon du cercle de convergence.

1147. *Théorème de Laurent.* — Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ soit uniforme et continue dans l'espace annulaire renfermé entre les contours de deux aires $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$, intérieurs l'un à l'autre. Si l'on parcourt les deux contours dans le sens direct

relativement aux deux aires $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{a}$ comprises *dans l'intérieur* de ces contours, le sens direct relativement à l'aire $\mathfrak{a}$ sera le sens rétrograde relativement au contour intérieur de l'aire doublement connexe $\mathfrak{A} - \mathfrak{a}$, et l'on aura ainsi, pour l'intégrale d'une fonction quelconque,

$$\int_{\mathfrak{A}-\mathfrak{a}} = \int_{\mathfrak{A}} - \int_{\mathfrak{a}}.$$

Si donc z est un point de l'aire annulaire $\mathfrak{A} - \mathfrak{a}$, on aura, au lieu de la formule (4) [1133], la formule

$$(4) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\mathfrak{a}} \frac{d\zeta}{\zeta - z}\right],$$

d'où, en différentiant par rapport à z [1135],

$$\frac{f^{(n)}(z)}{1.2\ldots n} = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} - \int_{\mathfrak{a}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}\right].$$

1148. Supposons maintenant que les deux contours soient deux cercles de centre commun c et de rayons R et r. En faisant $\zeta = c + \mathrm{R}e^{i\varphi}$, nous aurons identiquement

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} &= i\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,d\varphi\left[1 + \frac{z-c}{\zeta-c} + \ldots + \left(\frac{z-c}{\zeta-c}\right)^{n-1}\right.\\ &\qquad\left. + \frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n-1}(\zeta-z)}\right]\\ &= 2\pi i\,[a_0 + a_1(z-c) + \ldots + a_{n-1}(z-c)^{n-1} + \Omega_n],\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$(5) \quad \left\{\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2\pi \mathrm{R}^k}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,e^{-ki\varphi}\,d\varphi,\\ \Omega_n &= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{r}{\mathrm{R}}\right)^n e^{nip}\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{e^{ni\varphi}(\zeta - z)}.\end{aligned}\right.$$

Pour la seconde intégrale de la formule (4), on a identi-

quement

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{(z-c)-(\zeta-c)} = -\left[\frac{1}{z-c} + \frac{\zeta-c}{(z-c)^2} + \dots + \frac{(\zeta-c)^{m-1}}{(z-c)^m} + \frac{(\zeta-c)^m}{(z-c)^m(z-\zeta)}\right],$$

d'où, en faisant

$$\zeta - c = \mathrm{r}e^{i\varphi}, \quad d\zeta = i(\zeta - c)\,d\varphi,$$

il vient

$$-\int_{a}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

$$= i\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,d\varphi\left[\frac{\zeta-c}{z-c} + \left(\frac{\zeta-c}{z-c}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\zeta-c}{z-c}\right)^m + \frac{(\zeta-c)^{m+1}}{(z-c)^m(z-\zeta)}\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{a_{-1}}{z-c} + \frac{a_{-2}}{(z-c)^2} + \dots + \frac{a_{-m}}{(z-c)^m} + \omega_m\right],$$

où l'on a posé

$$(6)\qquad \begin{cases} a_{-k} = \dfrac{\mathrm{r}^k}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,e^{ki\varphi}\,d\varphi, \\ \omega_m = -\dfrac{1}{2\pi i}\left(\dfrac{\mathrm{r}}{r}\right)^m e^{-mip}\displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{f(\zeta)\,e^{mi\varphi}}{\zeta - z}\,d\zeta. \end{cases}$$

Le point $z = c + re^{ip}$ étant situé en dehors du cercle de rayon r, on a $\frac{\mathrm{r}}{r} < 1$, et l'on en conclut, comme on l'a déjà fait pour l'expression de Ω_n, que ω_m est infiniment petit pour m infiniment grand.

Donc, *si $f(z)$ est une fonction uniforme et continue dans l'aire comprise entre deux cercles de centre commun c et de rayons r et R, cette fonction sera développable en une série convergente, ordonnée suivant les puissances entières, positives et négatives, de la différence $z - c$, et dans laquelle le coefficient $a_{\pm k}$ de la puissance $(z-c)^{\pm k}$ est déterminé par les formules* (5) *et* (6).

Remarquons que l'on peut réduire à une seule les formules qui donnent les coefficients d'indices positifs et ceux d'indices négatifs. En effet, l'intégrale $\int \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - c)^{k+1}}$ reste la même, quel que soit

le contour fermé (tracé à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A} - \mathfrak{a}$ et n'entourant qu'une seule fois le cercle $\mathfrak{a}$) le long duquel on prenne cette intégrale. On peut donc la prendre indifféremment soit le long du cercle extérieur, soit le long du cercle intérieur, soit le long d'un cercle intermédiaire quelconque de rayon $\rho > r$ et $< R$. D'après cela, dans les valeurs (5) et (6) de a_k et de a_{-k}, on pourra remplacer R et r par ρ, et l'on aura, pour toute valeur positive, nulle ou négative de l'indice k,

$$a_k = \frac{1}{2\pi\rho^k}\int_0^{2\pi} f(c+\rho e^{i\varphi})e^{-ki\varphi}\,d\varphi.$$

1149. Si la fonction $f(z)$ est uniforme et continue en tout point du cercle intérieur $\mathfrak{a}$, on pourra diminuer autant que l'on voudra le rayon de ce cercle sans qu'il s'introduise un infini dans la partie annulaire, et alors le point z pourra toujours être considéré comme extérieur à ce cercle. Donc la fonction $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ de la variable ζ sera uniforme et continue en tout point de l'aire $\mathfrak{a}$, et, par suite, l'intégrale $\int_{\mathfrak{a}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$ sera nulle. Avec cette intégrale s'évanouira la partie du développement qui contient les puissances négatives de $z - c$, et l'on retombera sur le théorème de Cauchy.

Si l'on suppose, au contraire, la fonction $f(z)$ uniforme et continue pour tous les points en dehors du cercle extérieur, on pourra donner au rayon R de ce cercle une valeur infiniment grande. Mais alors, dans l'expression de Ω_n donnée par la formule (5), $f(\zeta)$ convergeant vers une valeur nulle ou finie, l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{e^{ni\varphi}(\zeta - z)}$$

ne deviendra pas infinie, tandis que le facteur $\left(\frac{r}{R}\right)^n$ tendra vers zéro, quel que soit n. Donc, à la limite, Ω_n sera nul, et il le sera, en particulier, pour $n = 1$. La partie de la série correspondante aux puissances positives de $z - c$ se réduira à son premier terme

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,d\varphi,$$

lequel s'annulera lui-même si $f(\infty) = 0$. Alors le développement ne contiendra que des puissances négatives de $z - c$.

Exemple. — Considérons la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z - c_1)(z - c_2)},$$

où l'on suppose le module de c_1 moindre que celui de c_2. Si l'on décrit deux cercles $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, ayant pour centre l'origine et passant par les points c_1 et c_2, $f(z)$ sera uniforme et continue dans l'intérieur du cercle $\mathfrak{C}_1$. Donc, pour toute valeur de z intérieure à ce cercle, $f(z)$ sera développable en une série ordonnée suivant les puissances positives de z.

Dans l'intervalle des deux cercles, la fonction sera développable, par le théorème de Laurent, en une série contenant à la fois des puissances positives et des puissances négatives de z.

Enfin, pour une valeur de z extérieure au cercle $\mathfrak{C}_2$, la fonction $f(z)$ sera uniforme et continue, quelque grand que soit le module de z. Le développement ne contiendra donc plus que des puissances négatives de z, le terme constant étant nul, puisque $f(\infty)$ est égal à zéro.

1150. Le théorème de Laurent est un cas particulier d'une formule plus générale.

Soient $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ les points de discontinuité de la fonction uniforme $f(z)$ renfermés dans l'aire $\mathfrak{A}$, et supposons que l'on ait tracé dans cette aire un cercle $\mathfrak{C}$, de centre quelconque c, qui renferme dans son intérieur tous ces points de discontinuité. Décrivons, de plus, de ces points comme centres, des cercles $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_\mu$, assez petits pour être tous extérieurs les uns aux autres et intérieurs au cercle $\mathfrak{C}$.

La fonction $f(z)$ sera uniforme et continue dans tout l'espace

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{C} - (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \ldots + \mathfrak{C}_\mu)$$

compris entre tous ces cercles, et, si z est un point quelconque de cet espace $\mathfrak{B}$, il viendra

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{B}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Or on aura, comme au n° **1147**,

$$\int_{\mathfrak{B}} = \int_{\mathfrak{C}} - \left(\int_{\mathfrak{C}_1} + \int_{\mathfrak{C}_2} + \cdots + \int_{\mathfrak{C}_\mu} \right).$$

De plus, dans $\int_{\mathfrak{C}}$, le module de $\zeta - c$ étant plus grand que celui de $z - c$, on en conclura, comme au n° **1140**,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = a_0 + a_1(z - c) + \cdots + a_{n-1}(z - c)^{n-1} + \Omega_n,$$

Ω_n étant infiniment petit pour n infini, et chaque coefficient a_k étant donné par la formule

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - c)^{k+1}}.$$

Dans $\int_{\mathfrak{C}_h}$, au contraire, le module de $\zeta - c_h$ étant plus petit que celui de $z - c_h$, on en conclura, comme au n° **1148**,

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_h} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \frac{a_1^{(h)}}{z - c_h} + \cdots + \frac{a_m^{(h)}}{(z - c_h)^m} + \omega_m,$$

ω_m étant infiniment petit pour m infini, et chaque coefficient $a_k^{(h)}$ étant donné par la formule

$$a_k^{(h)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_h} f(\zeta)(\zeta - c_h)^{k-1}\, d\zeta.$$

Comme on peut prendre les rayons des cercles $\mathfrak{C}_h$ aussi petits que l'on voudra, il s'ensuit que, pour tout point z pris à l'intérieur du cercle $\mathfrak{C}$ et autre que les points de discontinuité, on pourra développer la fonction $f(z)$ en une série convergente, ordonnée suivant les puissances entières et positives de la différence $z - c$ et suivant les puissances entières et négatives des différences

$$z - c_1, \quad z - c_2, \quad \ldots, \quad z - c_\mu,$$

de sorte que l'on obtiendra un développement de la forme

$$\begin{aligned} f(z) = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \ldots \\ + a_{-1}^{(1)}(z-c_1)^{-1} + a_{-2}^{(1)}(z-c_1)^{-2} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + a_{-1}^{(\mu)}(z-c_\mu)^{-1} + a_{-2}^{(\mu)}(z-c_\mu)^{-2} + \ldots . \end{aligned}$$

1151. Les théorèmes précédents peuvent s'étendre aux fonctions de plusieurs variables.

Soit une fonction $f(z, z')$ des deux variables complexes z, z', qui soit uniforme et continue par rapport à chacune de ces variables dans l'intérieur d'une aire $\mathfrak{A}$. En appliquant la formule du n° 1133, on aura d'abord

$$f(z, z') = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta, z')}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

On a d'ailleurs, par la même formule,

$$f(\zeta, z') = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta, \zeta')}{\zeta' - z'}\, d\zeta'.$$

Donc

$$f(z, z') = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta, \zeta')}{(\zeta - z)(\zeta' - z')}\, d\zeta\, d\zeta'.$$

On étendrait de même la formule au cas d'un nombre quelconque de variables.

On en tirerait ensuite la généralisation du théorème de Taylor pour le cas de plusieurs variables.

§ VI.

ÉTUDE D'UNE FONCTION UNIFORME DANS LE VOISINAGE DES POINTS OU ELLE DEVIENT NULLE OU INFINIE.

1152. *Indice d'une fonction en un point donné.* — Nous avons vu que toute fonction $f(x)$, uniforme et continue dans l'intérieur d'une aire $\mathfrak{A}$, peut se mettre sous la forme

$$f(z) = a_0 + a_1(z-c) + \ldots + a_{n-1}(z-c)^{n-1} + \Omega_n,$$

c étant un point quelconque de cette aire, et les coefficients a_k,

ainsi que le terme complémentaire Ω_n, étant déterminés par les formules du n° 1140.

Si l'on suppose que le point c soit un zéro de la fonction, alors le premier terme $a_0 = f(c)$ du développement s'annulera, et il pourra en être de même pour un ou plusieurs des coefficients consécutifs suivants $a_1, a_2, \ldots$. Mais il y aura nécessairement quelqu'un de ces coefficients qui différera de zéro, sans quoi $f(z)$, se réduisant à Ω_n, serait infiniment petite pour n infiniment grand, et par suite devrait être rigoureusement nulle dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$.

Soit $a_m = \frac{1}{1.2\ldots m} f^{(m)}(c)$ le premier coefficient du développement qui ne s'annule pas. La valeur de $f(z)$ pourra s'écrire sous l'une ou l'autre des deux formes

$$f(z) = \Omega_m, \quad f(z) = a_m(z-c)^m + \Omega_{m+1},$$

d'où l'on tire

$$\frac{f(z)}{(z-c)^m} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-c)^m(\zeta-z)},$$
$$\frac{f(z)}{(z-c)^m} = a_m + (z-c)\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-c)^{m+1}(\zeta-z)}.$$

La première de ces deux expressions montre que la valeur du rapport $\frac{f(z)}{(z-c)^m}$ est finie, quel que soit le point z pris dans l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$. La seconde montre que cette même valeur se réduit à a_m pour $z = c$, et par suite qu'elle ne s'annule pas au point c.

Donc, *si $f(z)$ est une fonction uniforme et continue dans l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$, et ne s'annulant qu'au seul point c de cette aire, il existera toujours un nombre m,* ENTIER ET POSITIF, *tel que la limite du rapport $\frac{f(z)}{(z-c)^m}$, pour $z = c$, sera finie et différente de zéro.*

Il s'ensuit de là que la fonction

$$\frac{f(z)}{(z-c)^m} = g(z)$$

sera uniforme, continue et différente de zéro pour TOUS *les points de l'aire* $\mathfrak{A}$.

Cet exposant m, qui est l'indice de la première des dérivées $f'(z)$, $f''(z)$, ... qui ne s'annule pas au point c, s'appelle l'*indice* de la fonction $f(z)$ au point c. Cet indice exprime l'ordre infinitésimal de $f(z)$ pour $z - c$ infiniment petit du premier ordre.

D'après cela, la fonction $f(z)$ pourra toujours se mettre sous la forme

$$f(z) = (z - c)^m g(z),$$

$g(z)$ étant une fonction de z, uniforme, continue et différente de zéro dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$.

1153. Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ soit uniforme, continue et différente de zéro dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, excepté au point c, où elle devient infinie. La fonction $\frac{1}{f(z)}$ sera uniforme, continue et différente de zéro dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, sauf au point c, où elle s'annulera. Donc, en vertu de ce qui vient d'être dit, on pourra poser

$$\frac{1}{f(z)} = (z - c)^n g_1(z),$$

$g_1(z)$ étant une fonction uniforme, continue et différente de zéro dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, et n un nombre entier et positif. Or l'inverse de $g_1(z)$,

$$\frac{1}{g_1(z)} = g(z),$$

jouit évidemment des mêmes propriétés que $g_1(z)$. Donc $f(z)$, qui a un infini en c, pourra se mettre sous la forme

$$f(z) = (z - c)^{-n} g(z),$$

$g(z)$ désignant une fonction uniforme, continue et différente de zéro dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, et n étant un nombre entier et positif.

Enfin, si $f(z)$ n'a ni zéro ni infini dans l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$, on pourra, par analogie, la mettre sous la forme

$$f(z) = (z - c)^0 g(z),$$

$g(z)$ étant une fonction de même nature que précédemment.

Donc enfin, *si une fonction $f(z)$, uniforme dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, est en même temps continue et différente de zéro dans toute cette étendue, sauf peut-être au seul point c, où elle pourra devenir nulle ou infinie, on pourra mettre toujours cette fonction sous la forme*

$$(1) \qquad f(z) = (z-c)^m g(z),$$

$g(z)$ étant une fonction uniforme, continue et différente de zéro dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}$, et m un nombre entier, positif, nul ou négatif, exprimant l'ordre infinitésimal [186] *de la fonction $f(z)$ dans le voisinage du point c.* Ce nombre m s'appellera, dans tous les cas, l'*indice* de la fonction $f(z)$ au point c.

1154. De l'équation (1) on tire

$$(2) \qquad f'(z) = (z-c)^{m-1}[(z-c)g'(z) + m\,g(z)],$$

et, comme $g'(z)$ est finie et continue dans toute l'étendue de $\mathfrak{A}$ [1136], l'expression entre crochets dans le second membre de (2) sera finie et continue dans toute l'étendue de $\mathfrak{A}$, et différente de zéro pour $z=c$. Donc l'ordre infinitésimal de $f'(z)$ en c est égal à $m-1$. Par conséquent, *l'indice de la dérivée d'une fonction nulle ou infinie pour $z=c$ est égal à l'indice de la fonction, diminué d'une unité.*

Cette règle ne s'appliquerait plus au cas de $m=0$.

Il résulte de là que, *si une fonction uniforme est infinie en un point c, toutes ses dérivées sont infinies en ce même point* [383].

1155. Connaissant les indices de plusieurs fonctions $f_1, f_2, \ldots,$ on pourra trouver aisément l'indice d'une fonction rationnelle quelconque de ces fonctions, laquelle sera formée au moyen des trois opérations d'addition (comprenant la soustraction), de multiplication et de division.

Soient m_1, m_2 les indices, relatifs au point c, des deux fonctions f_1, f_2, continues et différentes de zéro en tout autre point de l'aire $\mathfrak{A}$, et soient a_1, a_2 deux constantes qui ne sont ni nulles ni infinies. La fonction

$$F = a_1 f_1 + a_2 f_2$$

pourra, suivant ce que nous venons de voir, se mettre sous la

forme

$$F = a_1(z - c)^{m_1} g_1 + a_2(z - c)^{m_2} g_2,$$

g_1, g_2 étant deux fonctions continues et différentes de zéro en tout point de l'aire $\mathfrak{A}$.

Soit maintenant μ un nombre entier et fini quelconque, tel qu'aucune des deux sommes $\mu + m_1$, $\mu + m_2$ ne soit négative. En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $(z - c)^\mu$, il vient

$$(z - c)^\mu F = a_1(z - c)^{\mu + m_1} g_1 + a_2(z - c)^{\mu + m_2} g_2.$$

Chacun des deux termes du second membre étant une fonction uniforme et continue dans le voisinage du point c, il en sera de même du premier membre

$$(z - c)^\mu F.$$

Or ce produit est lui-même d'un certain ordre ν, de sorte que l'on a, ν étant entier et G désignant une fonction uniforme, continue et différente de zéro,

$$(z - c)^\mu F = (z - c)^\nu G.$$

Donc

$$F = (z - c)^{\nu - \mu} G,$$

et, par suite, F est une quantité de l'ordre entier, positif, nul ou négatif, $\nu - \mu$.

La fonction F, si $\nu - \mu > 0$, ou son inverse $\frac{1}{F}$, si $\nu - \mu < 0$, sera continue dans le voisinage de c. Donc le point c est un infini de l'une des deux fonctions F, $\frac{1}{F}$, et l'autre sera alors finie et continue dans le voisinage de c. Donc la fonction F sera continue, ou du moins elle n'aura que des infinis de première espèce.

F pourrait s'annuler en d'autres points de $\mathfrak{A}$ que le point c. On dirait alors pour ces points ce qu'on vient de dire pour le point c. Les zéros de F, autres que le point c, seront nécessairement isolés les uns des autres, comme cela résulte de ce que nous avons vu au n° **1144**, à moins que la fonction F ne se réduise identiquement à zéro.

1156. Les fonctions

$$\varphi = f_1 \cdot f_2, \quad \chi = \frac{f_1}{f_2}$$

pourront s'écrire sous la forme

$$\varphi = (z-c)^{m_1+m_2} g_1 \cdot g_2,$$

$$\chi = (z-c)^{m_1-m_2} \frac{g_1}{g_2}.$$

$g_1 \cdot g_2$ et $\frac{g_1}{g_2}$ étant des fonctions uniformes, continues et différentes de zéro en tout point de $\mathfrak{A}$, φ et χ auront au point c pour indices respectifs $m_1 + m_2$ et $m_1 - m_2$. En tout autre point de $\mathfrak{A}$, φ et χ seront continues et différentes de zéro. Ces fonctions présenteront donc le même caractère que f_1 et f_2, savoir, d'être uniformes et continues dans toute l'étendue de $\mathfrak{A}$, à l'exception du point c, où elles peuvent avoir un infini.

Plus généralement, si l'on considère une fonction de la forme

$$\frac{f_1 \cdot f_2 \cdots f_j}{\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdots \varphi_k},$$

les fonctions

$$f_1, f_2, \ldots, f_j, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$$

ayant au point c les indices respectifs

$$m_1, m_2, \ldots, m_j, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k,$$

l'indice, au même point, de la fonction proposée sera

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_j) - (\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k).$$

Le caractère des fonctions uniformes, continues et différentes de zéro, à l'exception d'un nombre limité de zéros et d'infinis isolés, ne se perd donc pas, lorsque l'on combine les fonctions par addition (ou soustraction), multiplication et division, de manière à en former une fonction rationnelle quelconque.

§ VII.

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE D'UNE FONCTION UNIFORME EN TOUT POINT D'UNE AIRE DONNÉE, A L'EXCEPTION D'UN NOMBRE LIMITÉ D'INFINIS DE PREMIÈRE ESPÈCE.

1157. Soient $c_1, c_2, \ldots, c_k$ des points isolés, pris à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$, et $m_1, m_2, \ldots, m_k$ des indices positifs quelconques. La fonction

$$(1) \qquad F = (z - c_1)^{m_1}(z - c_2)^{m_2}\ldots(z - c_k)^{m_k}$$

sera uniforme et continue en tout point de $\mathfrak{A}$ et ne s'annulera qu'aux points $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Elle n'aura donc aucun infini, mais seulement des zéros isolés en ces points c. Donc l'indice de cette fonction sera positif aux points c, nul dans tout le reste de l'aire.

Si l'on pose

$$F = (z - c_1)^{m_1} G,$$

il est clair que G sera une fonction uniforme et continue dans toute l'aire $\mathfrak{A}$, et qui ne s'annulera pas au point c_1. Donc m_1 sera l'indice de F au point c_1. Pareillement, $m_2, \ldots, m_k$ seront les indices de F aux autres points zéros $c_2, \ldots, c_k$.

Soit maintenant $f = f(z)$ une fonction quelconque, uniforme dans toute l'étendue de $\mathfrak{A}$, et continue dans la même étendue, excepté aux k points $c_1, c_2, \ldots, c_k$, où elle devient infinie. Les indices de f en ces points seront des entiers négatifs

$$-n_1, \quad -n_2, \quad \ldots, \quad -n_k.$$

En tout autre point de $\mathfrak{A}$, l'indice de f sera nul ou positif.

Si l'on considère le produit

$$g = Ff$$

de la fonction f par la fonction pré cédente F, ce produit sera uniforme et continu en tout point de $\mathfrak{A}$ autre que les points c. En un point c, l'indice de ce produit sera $m - n$; en tout autre point, l'indice de g sera égal à celui de f, et par suite nul ou positif.

Si donc on prend les indices $m_1, m_2, \ldots, m_k$ respectivement égaux à $n_1, n_2, \ldots, n_k$, les indices du produit g aux points c_1,

$c_2, \ldots, c_k$ seront tous nuls, et, partant, la fonction g sera finie et continue en ces points c, comme en tout autre point de l'aire $\mathfrak{A}$.

Donc, *si la fonction f est discontinue seulement aux points $c_1, c_2, \ldots, c_k$, et que les indices correspondants à ces points soient $-n_1, -n_2, \ldots, -n_k$, le produit*

$$g(z) = (z-c_1)^{n_1}(z-c_2)^{n_2}\ldots(z-c_k)^{n_k}f(z)$$

sera une fonction uniforme et continue dans l'étendue entière de l'aire $\mathfrak{A}$.

On pourra, par conséquent, développer cette fonction, par le théorème de Cauchy, dans l'intérieur d'un cercle tracé dans $\mathfrak{A}$ autour d'un centre quelconque γ, et l'on aura ainsi

$$g(z) = a_0 + a_1(z-\gamma) + a_2(z-\gamma)^2 + \ldots,$$

en posant

$$a_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{g(z)\,dz}{(z-\gamma)^{j+1}}.$$

On a, par conséquent, dans l'intérieur du même cercle,

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1(z-\gamma) + a_2(z-\gamma)^2 + \ldots}{(z-c_1)^{n_1}(z-c_2)^{n_2}\ldots(z-c_k)^{n_k}}.$$

1158. En particulier, s'il n'y a qu'un seul point c, en prenant ce point pour γ, on aura

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^n},$$

$$a_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{g(z)\,dz}{(z-c)^{j+1}} = \frac{g^{(j)}(c)}{1.2\ldots j},$$

d'où l'on tire

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-c)^n} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z-c} + a_n + a_{n+1}(z-c) + \ldots.$$

On a ainsi le développement de la fonction $f(z)$ suivant les puissances entières, négatives et positives, de $z-c$.

On tire de là immédiatement l'expression du résidu de la fonction $f(z)$ pour le point c. On a, en effet, d'après ce que nous

avons vu [1131],

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)\,dz = a_{n-1} = \frac{g^{(n-1)}(c)}{1.2\ldots(n-1)}$$

$$= \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\lim_{\varepsilon=0}\frac{d^{n-1}[\varepsilon^n f(c+\varepsilon)]}{d\varepsilon^{n-1}}.$$

Donc, *si $f(z)$ est une fonction uniforme dans le voisinage du point de discontinuité c, et que $-n$ soit l'indice de la fonction en ce point, le résidu de la fonction relatif au point c sera donné par la formule*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)\,dz = \lim_{\varepsilon=0}\frac{D_\varepsilon^{n-1}[\varepsilon^n f(c+\varepsilon)]}{(n-1)!}.$$

1159. Soit $f(x)$ une fonction finie et continue en tout point du plan situé à distance finie de l'origine ou, si nous employons la représentation sur la sphère [1111], en tout point de la sphère autre que le point O′. Partageons la sphère en deux calottes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, dont l'une contienne O et l'autre O′, et transportons les points de la calotte inférieure $\mathfrak{A}'$ sur le plan antipode.

La fonction $f(z) = f\left(\frac{1}{z'}\right) = \varphi(z')$ sera finie et continue pour toute valeur de z', excepté $z' = 0$. Soit $-n$ l'indice de cette fonction pour $z' = 0$. On pourra, d'après ce que nous avons vu, développer la fonction $z'^n\varphi(z')$, uniforme et continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}'$, en série ordonnée suivant les puissances positives de z', et poser

$$z'^n\varphi(z') = a_0 + a_1 z' + \ldots + a_{n-1}z'^{n-1} + \Omega_n z'^n,$$

Ω_n étant une fonction finie et continue dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}'$. Donc

$$\varphi(z') = \frac{a_0}{z'^n} + \frac{a_1}{z'^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z'} + \Omega_n,$$

d'où, en remplaçant z' par $\frac{1}{z}$, $\varphi(z')$ par $f(z)$,

$$\Omega_n = f(z) - (a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z),$$

formule vraie dans toute l'étendue de l'aire $\mathfrak{A}'$.

Or la fonction Ω_n est finie et continue sur toute la calotte $\mathfrak{A}'$; elle l'est évidemment aussi sur toute la calotte $\mathfrak{A}$. Donc elle l'est sur toute la sphère, et, par conséquent [1137], elle se réduit à une constante a_n. On a donc

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n.$$

Donc *une fonction uniforme qui ne devient infinie que pour z infini et qui pour toute autre valeur de z reste finie et continue est une fonction rationnelle et entière de z, dont le degré est égal à l'indice du point* $z = \infty$.

1160. Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ ait des infinis $c_1, c_2, \ldots, c_k$ autres que le point de l'infini O'. Partageons, comme précédemment, la sphère en deux calottes, contenant l'une tous les points c, l'autre le point O', qu'il soit ou non un infini.

Suivant ce qui a été établi [1157], la fonction pourra se mettre sous la forme

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots}{(z - c_1)^{n_1}(z - c_2)^{n_2} \ldots (z - c_k)^{n_k}},$$

$n_1, n_2, \ldots, n_k$ étant les indices des points $c_1, c_2, \ldots, c_k$, de sorte que la fonction

$$F(z) = (z - c_1)^{n_1}(z - c_2)^{n_2} \ldots (z - c_k)^{n_k} f(z)$$

sera uniforme et continue dans toute l'étendue de la calotte supérieure.

Elle sera également uniforme et continue en tout point de la calotte inférieure, excepté peut-être au point O'. Donc, d'après le numéro précédent, cette quantité $F(z)$ sera une fonction rationnelle et entière de z, d'un degré n marqué par son indice au point O', et par suite de la forme

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Donc la fonction proposée $f(z)$ sera de la forme

$$\frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0}{(z - c_1)^{n_1}(z - c_2)^{n_2} \ldots (z - c_k)^{n_k}},$$

le numérateur se réduisant à une constante, si la fonction $F(z)$ est finie en O'.

Donc *toute fonction uniforme et continue dans toute l'étendue de la sphère, à l'exception d'un nombre limité d'infinis de première espèce, est une fonction rationnelle.*

1161. Soient $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tous les points où la fonction $f(z)$ devient nulle ou infinie sur le plan horizontal ; $n_1, n_2, \ldots, n_k$ leurs indices, positifs ou négatifs. La fonction

$$\frac{f(z)}{(z-c_1)^{n_1}(z-c_2)^{n_2}\ldots(z-c_k)^{n_k}}$$

ne pourra devenir nulle ou infinie en aucun point du plan. Donc elle se réduira à une constante A [1137], et, par conséquent,

$$f(z) = A(z-c_1)^{n_1}(z-c_2)^{n_2}\ldots(z-c_k)^{n_k}.$$

Donc *une fonction uniforme et continue dans toute l'étendue de la sphère, à l'exception d'un nombre limité d'infinis de première espèce, est connue, à un facteur constant près, dès que l'on donne ses zéros et ses infinis avec leurs indices respectifs.*

Expression de l'indice d'une fonction sous la forme d'un résidu.

1162. Soit $f(z)$ une fonction uniforme, continue et différente de zéro en tout point de l'aire $\mathfrak{A}$, excepté au point c.

Si m est l'indice de $f(z)$ au point c, et que l'on mette $f(z)$ sous la forme [1153]

$$(z-c)^m g(z),$$

la fonction g et sa valeur réciproque $\frac{1}{g}$ seront l'une et l'autre uniformes et continues en tout point de l'aire $\mathfrak{A}$. Il en sera de même de la dérivée $g'(z)$ et du rapport $\frac{g'(z)}{g(z)}$. Donc l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{dg(z)}{g(z)},$$

prise autour d'une aire qui ne renferme aucun zéro ni aucun infini de la fonction à intégrer, sera nulle. En remplaçant maintenant

$g(z)$ par sa valeur $\dfrac{f(z)}{(z-c)^m}$, on a

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{(z-c)^m}{f(z)} \left[\frac{df(z)}{(z-c)^m} - mf(z) \frac{dz}{(z-c)^{m+1}} \right] = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathfrak{A}} \frac{df(z)}{f(z)} = m \int_{\mathfrak{A}} \frac{dz}{z-c}.$$

Or l'intégrale $\int_{\mathfrak{A}} \dfrac{dz}{z-c}$ a pour valeur $2\pi i$. Donc la formule précédente donne

$$m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{df}{f} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{df}{f} = \frac{1}{2\pi i} \int_c d\log f.$$

Donc *l'indice d'une fonction f en un point c est égal au résidu de la dérivée logarithmique de cette fonction,* $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \mathrm{D}_x \log f(z)$, *relatif au point c.*

1163. Si, au lieu d'un seul zéro ou infini c, l'aire $\mathfrak{A}$ en contient plusieurs $c_1, c_2, \ldots$, la somme algébrique des indices de la fonction $f(z)$ en ces points sera égale à la somme des résidus de la fonction $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ relatifs à ces mêmes points, c'est-à-dire [1132] au résidu intégral de cette même fonction relatif à l'aire $\mathfrak{A}$. On a donc, pour la valeur de cette somme d'indices,

$$m_1 + m_2 + \ldots = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{df(x)}{f(x)}.$$

Cette somme, dans laquelle on peut comprendre tous les indices, égaux à zéro, des points de l'aire $\mathfrak{A}$ qui ne sont ni des zéros, ni des infinis de $f(z)$, s'appelle l'*indice intégral* de la fonction $f(z)$ relatif à l'aire $\mathfrak{A}$.

1164. Si c est une racine multiple de l'une des deux équations

$$f(z) = 0, \quad f(z) = \infty,$$

l'indice m de la fonction $f(z)$ au point c représentera le degré de

multiplicité de cette racine, pris positivement ou négativement, suivant celle des deux équations à laquelle appartiendra la racine. En comptant donc une racine pour autant d'unités, positives ou négatives, qu'il y en a dans son degré de multiplicité, on voit que l'indice intégral

$$M = m_1 + m_2 + \ldots$$

relatif à l'aire $\mathfrak{A}$ représente l'excès du nombre des racines de l'équation $f(z) = 0$ comprises dans l'aire $\mathfrak{A}$ sur le nombre des racines de l'équation $f(z) = \infty$ comprises dans la même aire, en d'autres termes, l'excès du nombre des zéros sur le nombre des infinis de la fonction $f(z)$ dans l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$.

1165. Si l'on suppose que l'aire $\mathfrak{A}$ contienne un certain nombre de zéros et d'infinis $c_1, c_2, \ldots$ de la fonction $f(z)$, dont les indices respectifs soient $n_1, n_2, \ldots$, et que l'on applique à la fonction la transformation par rayons réciproques du n° 1114, l'aire $\mathfrak{A}'$, qui a pour contour la courbe transformée du contour de $\mathfrak{A}$, contiendra tous les autres zéros et infinis de $f\left(\frac{1}{z'}\right) = f(z)$ (y compris, s'il y a lieu, $z' = 0$ ou $z = \infty$), $c'_1, c'_2, \ldots$, d'indices respectifs $n'_1, n'_2, \ldots$. Les indices intégraux des aires $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ ont pour valeurs

$$n_1 + n_2 + \ldots = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{df}{f},$$

$$n'_1 + n'_2 + \ldots = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}'} \frac{df}{f}.$$

Mais, l'argument de $z' = \frac{1}{r} e^{-ip}$ étant de signe contraire à l'argument de z, z' parcourra le contour de $\mathfrak{A}'$ dans le sens rétrograde, tandis que z parcourra celui de $\mathfrak{A}$ dans le sens direct. Donc les deux intégrales $\int_{\mathfrak{A}} \frac{df}{f}$, $\int_{\mathfrak{A}'} \frac{df}{f}$ sont égales et de signes contraires, et leur somme est nulle, c'est-à-dire que l'on a

$$n_1 + n_2 + \ldots + n'_1 + n'_2 + \ldots = 0.$$

Donc, *si $f(z)$ est une fonction uniforme dans toute l'étendue du plan, la somme des indices de la fonction pour tous les points du plan est nulle.*

En d'autres termes, *le nombre total des zéros d'une fonction uniforme est égal au nombre total de ses infinis, en comptant chaque zéro ou chaque infini autant de fois qu'il y a d'unités dans son indice.*

1166. Considérons, par exemple, un polynôme du degré m. Pour $z = \infty$, le polynôme deviendra infiniment grand de l'ordre m, et il ne devient infini pour aucune valeur finie de z, de sorte que, pour tous les points du plan situés à des distances finies de l'origine, les indices sont nuls ou positifs. La somme de ces indices positifs devant être m, le polynôme, égalé à zéro, admettra donc m racines, égales ou inégales, ce qui donne encore une démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE QUATRIÈME.

THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

(SUITE.)

CHAPITRE V.

Équations différentielles simultanées.

CHAPITRE VI.

Du calcul des variations.

LIVRE CINQUIÈME.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES A PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

Équations aux dérivées partielles.

LIVRE SIXIÈME.

THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE. — APPLICATIONS A LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

Théorie des fonctions uniformes.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME TROISIÈME.

3202 Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.

ERRATA DU TOME TROISIÈME.

Pages.	Lignes	*Au lieu de*	*Lisez*
9	5	-0	$=0$
12	10 en remontant	(2)	(1)
21	10	$\partial\varphi_2\ldots\partial\chi_2$	$\partial\varphi_1\ldots\partial\chi_1$
23	15 en remontant	[949]	[950]
31	5 en remontant	$(-9+r)\eta$	$(-9+2r)\eta$
37	7	(4)	(5)
»	7 en remontant	$b+$	b_1+
48	1	maximum	minimum
64	9 au dénominateur	$\frac{\partial y}{\partial s}\cdots\frac{\partial z}{\partial s}$	$\frac{dy}{ds}\cdots\frac{dz}{ds}$
66	12	[960]	[962]
68	12 en remontant	$\int du+\ldots$	$\int dv+\ldots$
69	11 en remontant	$=u\,dv^2$	$=au\,dv^2$
»	9 en remontant	(d^2u+dv^2)	$(d^2u+u\,dv^2)$
71	5 en remontant	d^2	ds^2
73	4 en remontant	[686]	[685]
76	4 en remontant	$\frac{x_0-c}{\lambda},\ \frac{x_1-c}{\lambda}$	$\left\{\begin{array}{l}\text{arc cos}\,\frac{x_0-c}{\lambda},\\ \text{arc cos}\,\frac{x_1-c}{\lambda}\end{array}\right.$
81	4 en remontant	$\partial x(\ldots)$	$\partial y(\ldots)$
83	5 en remontant	$r^2+e^{2\gamma}$	$r^2-e^{2\gamma}$
»	1 en remontant	r^2+e^{2w}	r^2-e^{2w}
86	9 en remontant	$\int\ldots$	$\int_{x_0}^{x_1}$
89	10 en remontant	[829]	[745]
143	5 en remontant	$\left(d\frac{x^2}{u}\cdots\right.$	$\left(2\frac{x^2}{u}\cdots\right.$
163	7 en remontant	$(y-l)$	$(y-b)$
169	13	$\ldots=mx\ldots.=nx\ldots$	$=mz\ldots,=nz\ldots$
176	6	$\frac{\ldots(A+Bp)s}{\ldots(A+Bp)t}$	$\frac{\ldots(A+Cp)s}{\ldots(A+Cp)t}$
181	4	horizontale	verticale
201	11	[778]	[779]
215	11 en remontant	[1049]	[1069]
222	1 en remontant	$\frac{dr}{2pq+bz}$	$\frac{dy}{2pq+b-z}$
246	13	[1044]	[1064]
249	5	$e^{i(\lambda-\varphi)}$	$e^{i(\chi-\varphi)}$
278	6	$f'\left(\frac{1}{z'}\right)$	$f\left(\frac{1}{z'}\right)$

Pages	Lignes	*Au lieu de*	*Lisez*
281	9 en remontant	$\Omega = \left(\frac{r}{R}\right)^n$	$\Omega = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{r}{R}\right)^n$
283	10 en remontant	(8)	(3)
286	9	$\frac{d\zeta}{\zeta - z}$	$\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$
287	8	$f'(z)\,d\varphi$	$f(\zeta)\,d\varphi$
»	11	$\frac{r^k}{2\pi}$	$\frac{\mathbf{r}^k}{2\pi}$
295	2 en remontant	1144	1145
302	9	D_x log	D_z log



865

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

P&A Sci.

